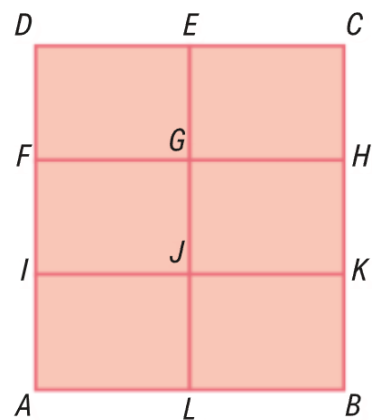




1. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$, o qual foi dividido em seis retângulos congruentes.



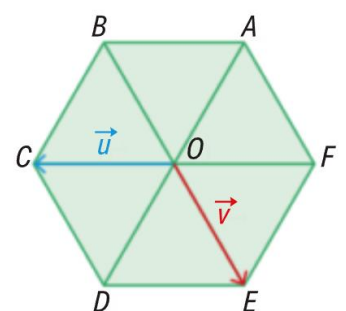
1.1. Complete de modo a obter proposições verdadeiras.

- a) $A + \overrightarrow{FE} = A + \overrightarrow{AJ} = J$
- b) $I + \overrightarrow{IL} = I + \overrightarrow{EH} = L$
- c) $\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{JH} = \overrightarrow{FH}$
- d) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{IL}$
- e) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IC}$
- f) $\overrightarrow{IL} - \overrightarrow{GL} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LG} = \overrightarrow{IG} = \overrightarrow{FE}$

1.2. Admita que $\|\overrightarrow{AI}\| = 3$ e $\|\overrightarrow{AL}\| = 4$. Determine:

- a) $\|\overrightarrow{HF}\|$ b) $\|\overrightarrow{LI}\|$
- $\|\overrightarrow{HF}\| = 2\|\overrightarrow{AL}\| = 2 \times 4 = 8$ $\|\overrightarrow{LI}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$
- c) $\|\overrightarrow{AC}\|$ d) $\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AH}\|$
- $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(2 \times 4)^2 + (3 \times 3)^2} = \sqrt{145}$ $\|\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{HI}\| = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$

2. Na figura está representado o hexágono regular $[ABCDEF]$ cujo centro é o ponto O . Sabe-se que $\vec{u} = \overrightarrow{OC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{OE}$.



Usando as operações adição de vetores e produto de um número real por um vetor, represente cada um dos seguintes vetores em função de \vec{u} e \vec{v} .

- 2.1. \overrightarrow{OD}
 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \vec{u} + \overrightarrow{OE} = \vec{u} + \vec{v}$
- 2.2. \overrightarrow{AD}
 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{OD} = 2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$
- 2.3. \overrightarrow{EF}
 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OF} = -\vec{v} + \overrightarrow{CO} = -\vec{v} - \vec{u}$
- 2.4. \overrightarrow{CF}
 $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CO} = 2(-\vec{u}) = -2\vec{u}$

3. Simplifique:

3.1. $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\vec{u}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\vec{v}+\frac{5}{6}(\vec{u}+\vec{v})$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\vec{u}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\vec{v}+\frac{5}{6}(\vec{u}+\vec{v})=\frac{1}{6}\vec{u}+\frac{1}{6}\vec{v}+\frac{5}{6}\vec{u}+\frac{5}{6}\vec{v}=\vec{u}+\vec{v}$$

3.2. $-2(\vec{a}-\vec{b})+2\vec{b}-(-\vec{a}+b)$

$$-2(\vec{a}-\vec{b})+2\vec{b}-(-\vec{a}+b)=-2\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}=-\vec{a}+3\vec{b}$$

3.3. $-\frac{2}{3}(\vec{x}-3\vec{y})-\frac{1}{3}\left(-9\vec{x}+\frac{3}{2}\vec{y}\right)$

$$-\frac{2}{3}(\vec{x}-3\vec{y})-\frac{1}{3}\left(-9\vec{x}+\frac{3}{2}\vec{y}\right)=-\frac{2}{3}\vec{x}+2\vec{y}+3\vec{x}-\frac{1}{2}\vec{y}=\left(-\frac{2}{3}+2\right)\vec{x}+\left(2-\frac{1}{2}\right)\vec{y}=\frac{7}{3}\vec{x}+\frac{3}{2}\vec{y}$$

3.4. $\frac{2}{5}(10\vec{a}-2\vec{b})-\frac{3}{2}\left(-4\vec{a}+\frac{2}{15}\vec{b}\right)$

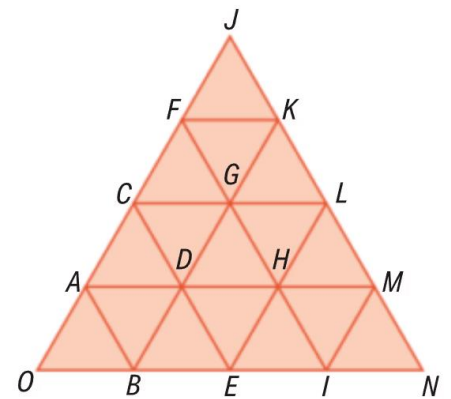
$$\frac{2}{5}(10\vec{a}-2\vec{b})-\frac{3}{2}\left(-4\vec{a}+\frac{2}{15}\vec{b}\right)=4\vec{a}-\frac{4}{5}\vec{b}+6\vec{a}-\frac{3}{15}\vec{b}=10\vec{a}+\left(-\frac{12}{15}-\frac{3}{15}\right)\vec{b}=10\vec{a}-\vec{b}$$

4. Na figura está representado o triângulo $[ONJ]$, decomposto em 16 triângulos equiláteros congruentes, cuja medida do lado é tomada por unidade.

Considere os vetores \vec{u} e \vec{v} definidos por:

$$\vec{u}=\overline{BH}+\frac{1}{2}\overline{EJ} \text{ e } \vec{v}=\frac{1}{2}\overline{ON}+2\overline{HG}$$

Determine o valor do número real k , sabendo que $\vec{u}=k\vec{v}$

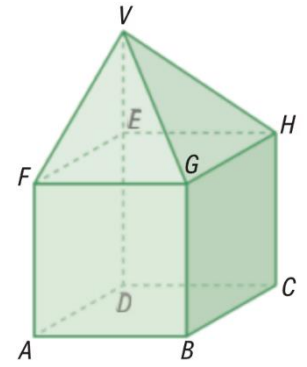


$$\vec{u}=\overline{BH}+\frac{1}{2}\overline{EJ}=\overline{BH}+\overline{EG}=\overline{BH}+\overline{HK}=\overline{BK}=\overline{OF}$$

$$\vec{v}=\frac{1}{2}\overline{ON}+2\overline{HG}=\overline{OE}+\overline{EC}=\overline{OC}$$

Como $\overline{OF}=\frac{3}{2}\overline{OC}$, isto é, $\vec{u}=\frac{3}{2}\vec{v}$, podemos concluir que $k=\frac{3}{2}$

5. Na figura, estão representados o cubo $[ABCDEFGH]$ de aresta 3 e a pirâmide $[EFGHV]$ em que o vértice E pertence a $[DV]$.
Sabe-se que o volume do sólido formado pelo cubo e pela pirâmide é igual a 33.



5.1. Mostre que $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GD} &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}) + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HD}) = \\ &= 2\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DH} - \overrightarrow{DH}) = 2\overrightarrow{AD} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AD} \quad \text{c.q.m.} \end{aligned}$$

5.2. Mostre que $\|\overrightarrow{EV}\| = 2$

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cubo}} + V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow 33 = 3^3 + \frac{1}{3} \times 3^2 \times \|\overrightarrow{EV}\| \Leftrightarrow 3\|\overrightarrow{EV}\| = 33 - 27 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EV}\| = \frac{6}{3} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{EV}\| = 2 \quad \text{c.q.m.}$$

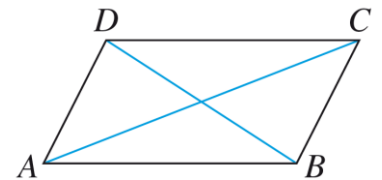
5.3. Justifique que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{EV}$ e determine o valor de k .

Os vetores \overrightarrow{EV} e \overrightarrow{GB} , são colineares.

$$\|\overrightarrow{GB}\| = \|k\overrightarrow{EV}\| \Leftrightarrow \|\overrightarrow{GB}\| = |k|\|\overrightarrow{EV}\| \Leftrightarrow 3 = |k| \times 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{3}{2}$$

Como os vetores \overrightarrow{EV} e \overrightarrow{GB} têm sentidos opostos, $k < 0$. Portanto, $k = -\frac{3}{2}$

6. Mostre que as diagonais de um paralelogramo se bissetam.



Sugestão:

- prove que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD}$;
- considere M e N pontos médios de $[AC]$ e $[BD]$, respetivamente, e prove que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AD} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AD}$$

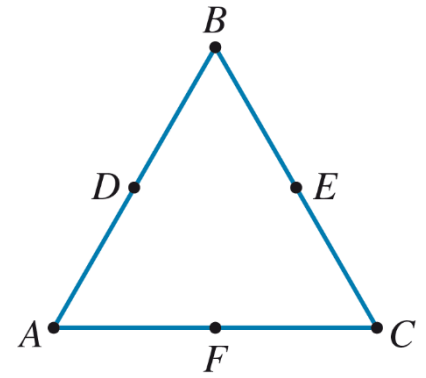
Seja M e N pontos médios de $[AC]$ e $[BD]$, respetivamente.

$$\text{Assim, } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Logo, } \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}.$$

$$\text{Daqui resulta } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{MN} = \vec{0}$$

7. Na figura, está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.
 Os pontos D, E e F são os pontos médios dos lados do triângulo.
 A área do triângulo $[ABC]$ é 16.
 Sejam X, Y e Z três pontos.
 Sabe-se que:



- $X = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$;
- $Y = C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$;
- $Z = A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}\right)$.

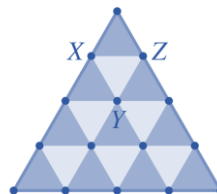
Determine a área do triângulo $[XYZ]$.

$$X = B - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = B + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}, \text{ então, } X \text{ é ponto médio de } [BD]$$

$$Y = C - \overrightarrow{DF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = C + \overrightarrow{FD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = E + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}, \text{ então, } Y \text{ é ponto médio de } [DE]$$

$$Z = A - 2\left(\overrightarrow{CF} + \frac{3}{4}\overrightarrow{DF}\right) = A - 2\overrightarrow{FC} - \frac{6}{4}\overrightarrow{DF} = A + 2\overrightarrow{CF} + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{FD} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CE}, \text{ então, } Z \text{ é ponto médio de } [BE]$$

Obtemos o seguinte triângulo:



$$\text{Logo, } A_{[XYZ]} = \frac{1}{16}A_{[ABC]} = \frac{1}{16} \times 16 = 1$$

8. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, os vetores $\vec{u}(-2,5)$ e $\vec{v}(3,-4)$.
 Determine as coordenadas do vetor:

8.1. \vec{w} tal que $\vec{w} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}$

$$\vec{w} = -\frac{1}{2}(-2,5) - (3,-4) = \left(1, -\frac{5}{2}\right) - (3,-4) = \left(-2, \frac{3}{2}\right)$$



8.2. \vec{x} tal que $\vec{x} = \frac{2}{5}\vec{u} - \frac{1}{5}\vec{v}$

$$\vec{x} = \frac{2}{5}(-2, 5) - \frac{1}{5}(3, -4) = \left(-\frac{4}{5}, 2\right) - \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

8.3. \vec{y} tal que $\frac{3}{2}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{v}$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}\vec{u} = 2\vec{y} + \frac{1}{3}\vec{v} &\Leftrightarrow 2\vec{y} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{3}{4}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v} \Leftrightarrow \vec{y} = \frac{3}{4}(-2, 5) - \frac{1}{6}(3, -4) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{y} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right) - \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow \vec{y} = \left(-2, \frac{53}{12}\right) \end{aligned}$$

8.4. \vec{t} tal que $-\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{2}{3}\vec{v}$

$$\begin{aligned} -\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{t} - \frac{2}{3}\vec{v} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\vec{t} = \frac{2}{3}\vec{v} - \vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} = \frac{4}{3}\vec{v} - 2\vec{u} \Leftrightarrow \vec{t} = \frac{4}{3}(3, -4) - 2(-2, 5) \Leftrightarrow \vec{t} = \left(4, -\frac{16}{3}\right) - (-4, 10) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{t} = \left(8, -\frac{46}{3}\right) \end{aligned}$$

9. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy os pontos:

$$A(-1, 2), B(-4, -3) \text{ e } C\left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

Determine as coordenadas do vetor:

9.1. $\vec{u} = \overline{AB} + \overline{CA}$

$$\overline{AB} = B - A = (-4, -3) - (-1, 2) = (-3, -5) \text{ e } \overline{CA} = A - C = (-1, 2) - \left(1, -\frac{1}{2}\right) = \left(-2, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{u} = \overline{AB} + \overline{CA} = (-3, -5) + \left(-2, \frac{5}{2}\right) = \left(-5, -\frac{5}{2}\right)$$

9.2. $\vec{v} = \overline{AC} - \overline{BC}$

$$\overline{AC} = -\overline{CA} = -\left(-2, \frac{5}{2}\right) = \left(2, -\frac{5}{2}\right) \text{ e } \overline{BC} = C - B = \left(1, -\frac{1}{2}\right) - (-4, -3) = \left(5, \frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{v} = \overline{AC} - \overline{BC} = \left(2, -\frac{5}{2}\right) - \left(5, \frac{5}{2}\right) = (-3, -5)$$

9.3. $\vec{t} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$

$$\overrightarrow{AC} = \left(2, -\frac{5}{2}\right), \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -(-3, -5) = (3, 5) \text{ e } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -\left(5, \frac{5}{2}\right) = \left(-5, -\frac{5}{2}\right)$$

$$\vec{t} = 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = 2\left(2, -\frac{5}{2}\right) - 3(3, 5) + \left(-5, -\frac{5}{2}\right) = (4, -5) - (9, 15) + \left(-5, -\frac{5}{2}\right) = \left(-10, -\frac{45}{2}\right)$$

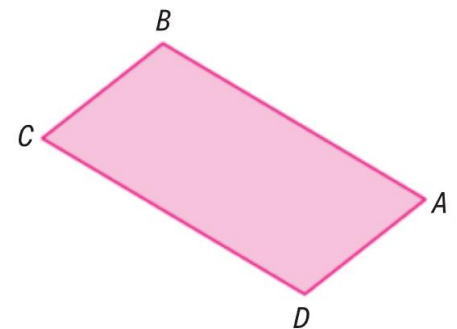
9.4. $\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

$$\vec{w} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}(3, 5) - \frac{2}{5}\left(-5, -\frac{5}{2}\right) = \left(1, \frac{5}{3}\right) - (-2, -1) = \left(7, \frac{8}{3}\right)$$

10. Num plano munido de um referencial o.n. Oxy sabe-se que os pontos $A(5, -1)$, $B(-1, 3)$ e $C(-4, -2)$ são vértices de um paralelogramo $[ABCD]$.

10.1. Determine as coordenadas do ponto D

$$D = A + \overrightarrow{BC} = A + (C - B) = A + [(-4, -2) - (-1, 3)] = (5, -1) + (-3, -5) = (2, -6)$$



10.2. Determine a norma do vetor \vec{w} , sabendo que $\vec{w} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{DB}$

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (5, -1) - (-4, -2) = (9, 1)$$

$$\overrightarrow{DB} = B - D = (-1, 3) - (2, -6) = (-3, 9)$$

$$\vec{w} = (9, 1) - (-3, 9) = (12, -8)$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{12^2 + (-8)^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$$

10.3. O paralelogramo $[ABCD]$ é um retângulo? Justifique.

1.º processo:

Se as diagonais do paralelogramo forem iguais, então é retângulo

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{9^2 + 1^2} = \sqrt{82} \text{ e } \|\overrightarrow{DB}\| = \sqrt{(-3)^2 + (9^2)} = \sqrt{90}$$

Como $\|\overrightarrow{CA}\| \neq \|\overrightarrow{DB}\|$ o paralelogramo não é um retângulo

2.º Processo:

Se se verificar o Teorema de Pitágoras no, por exemplo, triângulo $[ABC]$ então é um retângulo

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3) - (5, -1) = (-6, 4), \overrightarrow{BC} = C - B = (-4, -2) - (-1, 3) = (-3, -5) \text{ e } \overrightarrow{CA} = (9, 1)$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{CA}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 &\Leftrightarrow (\sqrt{90})^2 = \left(\sqrt{(-6)^2 + 4^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(-3)^2 + (-5)^2}\right)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 90 = 52 + 34 \Leftrightarrow 90 = 86 \text{ P.F.} \end{aligned}$$

Logo, $[ABCD]$ não é um retângulo



10.4. Mostre que a equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0$ define a circunferência cujo centro é ponto médio de $[AB]$ e que passa no ponto D .

$$\text{Centro: ponto médio de } [AB], M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{2}(-6, 4) = (5, -1) + (-3, 2) = (2, 1)$$

$$\text{Raio: } \overline{MD} = \sqrt{(2-2)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{49} = 7$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 44 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2y + 1^2 - 1^2 = 44 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 44 + 4 + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 49 \quad \text{c.q.m.} \end{aligned}$$

11. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy , o vetor $\vec{u}(-4, 3)$

Determine as coordenadas do vetor \vec{v} colinear com \vec{u} :

11.1. de sentido contrário e norma 10.

$$\vec{v} = k\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 10 \wedge k < 0$$

$$\vec{v} = k(-4, 3) = (-4k, 3k)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = 10 &\Leftrightarrow \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2} = 10 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 10 \Leftrightarrow 25k^2 = 100 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = -2 \vee k = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \vec{v}(-4 \times (-2), 3 \times (-2)) = (8, -6)$$

11.2. como o mesmo sentido e de norma 6

$$\vec{v} = k\vec{u} \wedge \|\vec{v}\| = 6 \wedge k > 0$$

$$\vec{v} = k(-4, 3) = (-4k, 3k)$$

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = 6 &\Leftrightarrow \sqrt{(4k)^2 + (3k)^2} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 6 \Leftrightarrow 25k^2 = 36 \Leftrightarrow k^2 = \frac{36}{25} \Leftrightarrow k = -\frac{6}{5} \vee k = \frac{6}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow k = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto } \vec{v}\left(-4 \times \left(\frac{6}{5}\right), 3 \times \left(\frac{6}{5}\right)\right) = \left(-\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$$

12. Considere os vetores $\vec{u}(-1,2)$ e $\vec{v}(3,x)$.

Determine o valor de x tal que:

12.1. \vec{u} e \vec{v} sejam colineares;

$$\frac{-1}{3} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow -x = 6 \Leftrightarrow x = -6$$

12.2. $2\vec{u} + \frac{5}{3}\vec{v}$ tenha coordenadas $(3,-1)$

$$\begin{aligned} 2(-1,2) + \frac{5}{3}(3,x) &= (3,-1) \Leftrightarrow (-2,4) + \left(5, \frac{5}{3}x\right) = (3,-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(3, \frac{5}{3}x + 4\right) = (3,-1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge \frac{5}{3}x + 4 = -1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge 5x + 12 = -3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge x = -\frac{15}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 = 3 \wedge x = -3 \end{aligned}$$

13. No referencial o.n. Oxy , estão representados dois vetores \vec{u} e \vec{v} .

Seja \vec{w} o vetor que satisfaz as condições:

- \vec{w} é colinear com o vetor $\vec{u} + \vec{v}$;
- a soma das coordenadas de \vec{w} é 6.

Determine as coordenadas de \vec{w} .

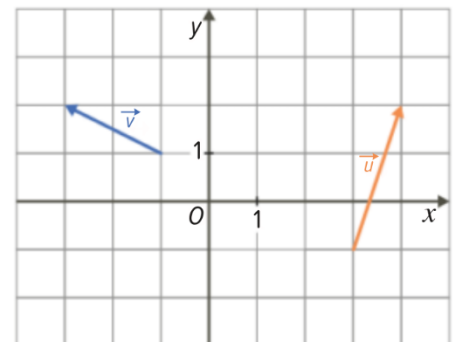
$$\vec{u}(1,3) \text{ e } \vec{v}(-2,1)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (1,3) + (-2,1) = (-1,4)$$

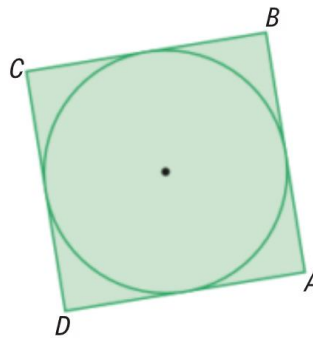
$$\vec{w} \text{ e } \vec{u} + \vec{v} \text{ são colineares, então, } \vec{w} = k(\vec{u} + \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{w} = k(-1,4) \Leftrightarrow \vec{w} = (-k, 4k)$$

$$\text{Como a soma das coordenadas de } \vec{w} \text{ é igual a 6, então } -k + 4k = 6 \Leftrightarrow k = 2$$

$$\text{Portanto } \vec{w}(-2,8)$$



14. Num plano munido de um referencial o.n. Oxy , sabe-se que os pontos $A(4, -4)$ e $D(-3, -5)$ são vértices consecutivos do quadrado $[ABCD]$ cujo centro pertence ao eixo Oy .



- 14.1. Mostre que a reta de equação $y = -7x - 1$ é a mediatriz do segmento de reta $[AD]$.

Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AD]$

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y+4)^2 &= (x+3)^2 + (y+5)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} + 8y + 16 &= \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} + 10y + 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8y - 10y &= 6x + 8x + 34 - 32 \Leftrightarrow -2y = 14x + 2 \Leftrightarrow y = -7x - 1 \quad \text{c.q.m.} \end{aligned}$$

- 14.2. Justifique que o centro do quadrado tem ordenada -1 .

Como a mediatriz de $[AD]$ passa no centro do quadrado e este pertence ao eixo Oy , então:

$$y = -7x - 1 \wedge x = 0 \Leftrightarrow y = -1 \wedge x = 0$$

Portanto o centro do quadrado tem ordenada -1

- 14.3. Determine as coordenadas dos pontos B e C .

Seja M o centro do quadrado, então $M(0, -1)$

$$B = M + \overrightarrow{MB} = M + \overrightarrow{DM} = (0, -1) + (3, 4) = (3, 3)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DM} &= M - D = \\ &= (0, -1) - (-3, -5) = \\ &= (3, 4) \end{aligned}$$

$$C = M + \overrightarrow{MC} = M + \overrightarrow{AM} = (0, -1) + (-4, 3) = (-4, 2)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= M - A = \\ &= (0, -1) - (4, -4) = \\ &= (-4, 3) \end{aligned}$$

- 14.4. Defina analiticamente a circunferência inscrita no quadrado $[ABCD]$.

Centro é $M(0, -1)$ e o raio é, por exemplo $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{50}}{2}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= D - A = \\ &= (-3, -5) - (4, -4) = \\ &= (-7, -1) \end{aligned}$$

Assim uma equação da circunferência é $x^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{2}$

14.5. Determine as coordenadas do vetor \vec{u} tal que $3\overrightarrow{AD} - 5\vec{u} = 2\overrightarrow{AC}$

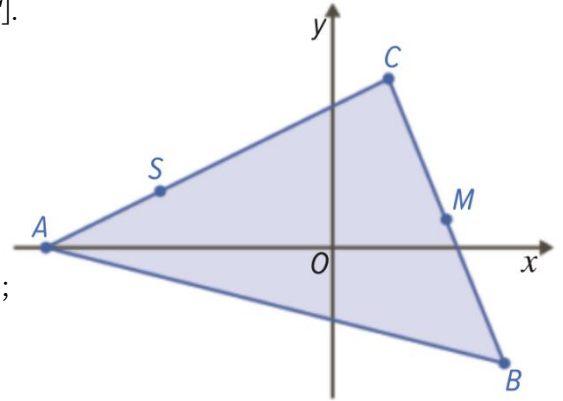
$$\overrightarrow{AD}(-7, -1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = C - A = (-4, 2) - (4, -4) = (-8, 6)$$

$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{AD} - 5\vec{u} = 2\overrightarrow{AC} &\Leftrightarrow 5\vec{u} = 3\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{3}{5}(-7, -1) - \frac{2}{5}(-8, 6) \Leftrightarrow \vec{u} = \left(-\frac{21}{5}, -\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = (-1, -3) \end{aligned}$$

15. No referencial o.n. Oxy , está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-5, 0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(3, -2)$;
- M é o ponto médio de $[BC]$ e tem coordenadas $\left(2, \frac{1}{2}\right)$;
- o ponto S é tal que $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.



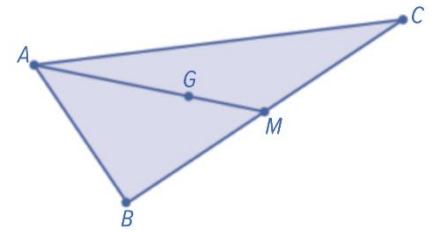
Determine as coordenadas de \overrightarrow{SM}

$$C = M + \overrightarrow{BM} = \left(2, \frac{1}{2}\right) + \left(2 - 3, \frac{1}{2} + 2\right) = \left(2, \frac{1}{2}\right) + \left(-1, \frac{5}{2}\right) = (1, 3)$$

$$S = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = (-5, 0) + \frac{1}{3}(1 + 5, 3 - 0) = (-5, 0) + (2, 1) = (-3, 1)$$

$$\overrightarrow{SM} = M - S = \left(2, \frac{1}{2}\right) - (-3, 1) = \left(5, -\frac{1}{2}\right)$$

16. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.
Em relação a um referencial o.n. Oxy , sabe-se que:



- M é o ponto médio de $[BC]$;
- $\|\overrightarrow{AG}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AM}\|$;
- as coordenadas dos vértices são $A(-2,1)$, $B(0,-2)$ e $C(6,2)$.

Determine $\|\overrightarrow{AG}\|$ e as coordenadas de G .

$$M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = (3,0)$$

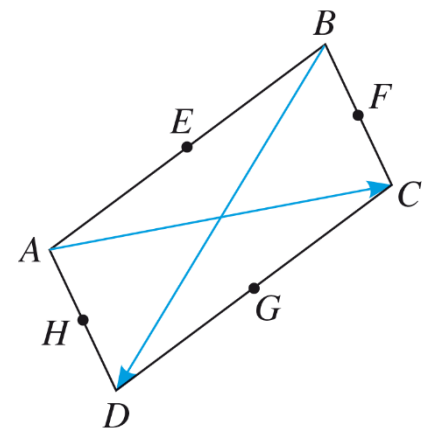
$$\overrightarrow{AM} = M - A = (3,0) - (-2,1) = (5,-1), \text{ então, } \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Como $\|\overrightarrow{AG}\| = \frac{2}{3}\|\overrightarrow{AM}\|$, logo, $\|\overrightarrow{AG}\| = \frac{2\sqrt{26}}{3}$

$$G = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$$

$$\text{Assim, } G = (-2,1) + \frac{2}{3}(5,-1) = (-2,1) + \left(\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

17. Na figura estão representados um paralelogramo $[ABCD]$, os pontos médios E, F, G e H dos lados $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ e $[DA]$, respetivamente, e os vetores \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BD} .



Sabe-se, fixado um certo referencial ortonormado, que $H\left(\frac{3}{2}, 2\right)$,

$$\overrightarrow{AC}(4,0) \text{ e } \overrightarrow{BD}(-2,-4)$$

17.1. Justifique que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HG}$ e indique as coordenadas de \overrightarrow{HG} .

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{HD} + 2\overrightarrow{DG} = 2(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG}) = 2\overrightarrow{HG}$$

$$\text{Como } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HG} \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}(4,0) \Leftrightarrow \overrightarrow{HG} = (2,0)$$



17.2. Determine as coordenadas dos pontos G , F e E .

$$G = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + \frac{1}{2}(4, 0) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + (2, 0) = \left(\frac{7}{2}, 2\right)$$

$$F = G - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \left(\frac{7}{2}, 2\right) - \frac{1}{2}(-2, -4) = \left(\frac{7}{2}, 2\right) + (1, 2) = \left(\frac{9}{2}, 4\right)$$

$$E = F + \overrightarrow{GH} = \left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{7}{2}, 2 - 2\right) = \left(\frac{9}{2}, 4\right) + (-2, 0) = \left(\frac{5}{2}, 4\right)$$

17.3. Justifique que $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{BC}$ e determine as coordenadas dos vértices do paralelogramo $[ABCD]$.

$$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

$$A = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{7}{2}, 4 - 2\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + \frac{1}{2}(-1, 2) = \left(\frac{3}{2}, 2\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (1, 3)$$

$$B = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \left(\frac{9}{2}, 4\right) + \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (4, 5)$$

$$C = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = F - \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \left(\frac{9}{2}, 4\right) - \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (5, 3)$$

$$D = H + \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = H - \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} = \left(\frac{3}{2}, 2\right) - \left(-\frac{1}{2}, 1\right) = (2, 1)$$