1. Num referencial o.n. *Oxyz* o ponto $Q(a^2-4\,,\ a^2-2a\,,a+2)$, com $a \in \mathbb{R}$, pertence ao eixo *Oz*. Qual é o valor de *a*?

(A) -2 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

Se $a \in Oz$ então $Q(0,\ 0,\ z)$

$a^2-4=0 \ \wedge \ a^2-2a=0$

$(a=2 \vee a=-2) \ \wedge \ (a=0 \vee a-2=0)$

$(a=2 \vee a=-2) \ \wedge \ (a=0 \vee a=2)$

$\{-2,2\} \cap \{0,2\} = \{2\}$ então $a=2$

2. Na figura 1 estão representados num referencial o.n. *Oxyz* os cubos [*ABOEFGJL*] e [*BCDOGHIJ*]

Sabe-se que:

- o ponto *B* pertence ao eixo *Ox*
- os pontos *D* e *E* pertencem ao eixo *Oy*
- o ponto *J* pertence ao eixo *Oz*
- $\overline{OB} = a$

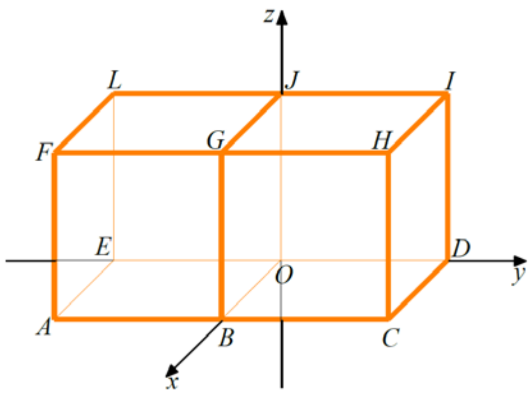


Figura 1

$A(x, -y, 0)$

$J(0, y, z)$

2.1 Qual das seguintes é uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AI]$?

(A) $x - y - 2z = 0$ **(B)** $x + 2y - z = 0$

(C) $x + y - 2z = 0$ **(D)** $x - 2y - z = 0$

$A(a, -a, 0)$

$I(0, a, a)$

$P(x, y, z)$ um ponto do plano mediador

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 + z^2 = x^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2$$

$$\cancel{x^2} - 2ax + \cancel{a^2} + \cancel{y^2} + 2ay + \cancel{a^2} + \cancel{z^2} =$$

$$= \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 2ay + \cancel{a^2} + \cancel{z^2} - 2az + \cancel{a^2}$$

$$-2ax + 4ay - 2az = 0$$

$$-2a(x + 2y - z) = 0$$

$$x + 2y - z = 0 \qquad D$$

2.2 Considera $d(C, L) = 3\sqrt{6}$. Escreve uma condição que defina:

$\overline{CL} = 3\sqrt{6}$ $\qquad (\overline{FL})^2 + (\overline{FC})^2 = (3\sqrt{6})^2$ * $\qquad \overline{FL} = a$

$\overline{FC}^2 = \overline{FA}^2 + \overline{AC}^2$

$\overline{FC}^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 \Leftrightarrow \overline{FC}^2 = 5a^2$

* $a^2 + 5a^2 = (3\sqrt{6})^2$

$6a^2 = 54 \Leftrightarrow a^2 = 9 \Leftrightarrow a = 3$

a) a reta *FL* **b)** o plano *FGB*

$y = 3 \wedge z = 3$ $\qquad x = 3$

c) o segmento de reta $[BC]$

$x=3 \wedge z=0 \wedge 0 \leq y \leq 3$

d) a semirreta $\dot{C}H$

$H(3,3,3)$

$x=3 \wedge y=3 \wedge z \leq 3$

e) a semirreta $\dot{J}I$

$x=0 \wedge z=3 \wedge y \geq 0$

f) o quadrado $[BOJG]$

$y=0 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

g) a face $[ACHF]$

$x=3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge$
$0 \leq z \leq 3$

h) o sólido $[ACDEFHIJL]$

$0 \leq x \leq 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

3. Num referencial o.n. *Oxyz* considera os pontos $A(a\,,b\,,c)$ e $B(-c\,,b\,,-a)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $a \neq -c$. Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador de $[AB]$?

(A) $(1\,,-1\,,0)$ **(B)** $(0\,,1\,,-1)$ **(C)** $(1\,,0\,,-1)$ **(D)** $(1\,,0\,,1)$

$(x-a)^2+\cancel{(y-b)^2}+(z-c)^2=(x+c)^2+\cancel{(y-b)^2}+(z+a)^2$

$\cancel{x^2}-2ax+\cancel{a^2}+\cancel{z^2}-2zc+\cancel{c^2}=\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+\cancel{z^2}+2az+\cancel{a^2}$

$-2ax-2cz=2cx+2az$

$-ax-cx=az+cz$

$(-a-c)x=(a+c)z$

como $a \neq -c \Leftrightarrow a+c \neq 0$ e $(x,0,z)$

$-x(a+c)=(a+c)z$

$-x=z$ logo $(1,0,-1)$ $\boxed{C}$

$x=-z$

4. Num referencial o.n. *Oxyz* considera os pontos $A(-2\,,2\,,4)$, $B(-1\,,0\,,4)$ e $C(0\,,0\,,4)$

4.1) O plano *ABC* é:

(A) paralelo ao plano *yOz* **(B)** perpendicular ao eixo *Oz*

(C) paralelo ao plano *xOz* **(D)** perpendicular ao eixo *Ox*

4.2) Qual das seguintes é uma condição que define a reta *BC*?

(A) $y = 0 \wedge z = 4$ **(B)** $x = -1 \wedge y = 0$

(C) $x = 0 \wedge z = 4$ **(D)** $y = 2 \wedge z = 4$

5. A figura 2 representa num referencial o.n. *Oxyz* a pirâmide quadrangular [*ABCDV*]

Sabe-se que:

- $A(3\,,-3\,,2)$
- $C(-1\,,1\,,2)$
- O volume da pirâmide é 32

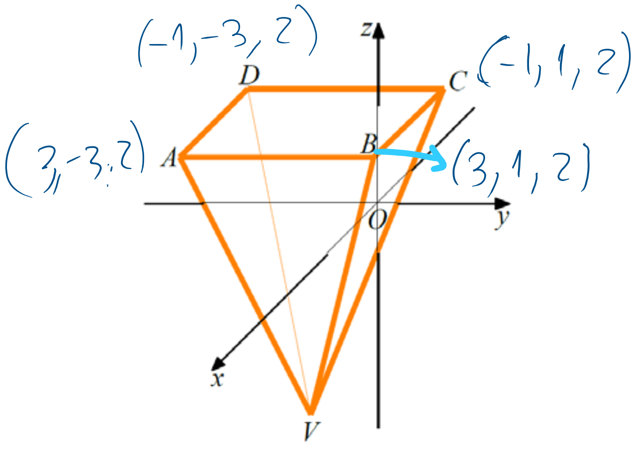


Figura 2

5.1) Qual das equações define o plano paralelo a *ABC* que contém o ponto *V* ?

(A) $z = -6$ **(B)** $x = 1$ **(C)** $z = -4$ **(D)** $y = -1$

$V = \frac{1}{3} Ab \times h$

$Ab = \overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{AB}^2$ $\overline{AB} = \overline{BC}$

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2$

$32 = 2\overline{AB}^2$

$\overline{AB}^2 = 16$

$\overline{AB} = 4$

$\vec{AC} = C - A = (-1,1,2) - (3,-3,2)$

$= (-1-3, 1+3, 2-2) = (4,4,0)$

$\|\vec{AC}\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$32 = \frac{1}{3} \times 16 \times h \Leftrightarrow \frac{1}{3}h = 2$ $h = 6$ $\boxed{C}$

logo V tem cota $2-6 = -4 = z$

5.2) Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de reta $[BD]$?

(A) $(3\,,0\,,3)$ **(B)** $(1\,,1\,,2)$ **(C)** $(2\,,-1\,,-2)$ **(D)** $(-5\,,5\,,0)$

$B(3,1,2)$ $D(-1,-3,2)$ $P(x,y,z)$

$(x-3)^2+(y-1)^2+\cancel{(z-2)^2}=(x+1)^2+(y+3)^2+\cancel{(z-2)^2}$

$\cancel{x^2}-6x+\cancel{9}+\cancel{y^2}-2y+\cancel{1}=\cancel{x^2}+2x+\cancel{1}+\cancel{y^2}+6y+\cancel{9}$

$-8x=8y$

$-x=y$

$\boxed{D}$

5.3) Qual é o conjunto de pontos definido pelo seguinte sistema de equações cartesianas $y=-3\ \land z=2$?

(A) reta *BC*

(B) reta *AD*

(C) segmento de reta *DC*

(D) reta *AV*

5.4) Qual é a condição que define o segmento de reta que é a altura da pirâmide?

(A) $x=3\ \land y=1\ \land\ -4\leq z\leq 2$

(B) $x=1\ \land\ y=-1\ \land\ -6\leq z\leq 0$

(C) $x=3\ \land y=1\ \land\ -6\leq z\leq 0$

(D) $x=1\ \land\ y=-1\ \land\ -4\leq z\leq 2$

5.5) Qual é o ponto de interseção do plano mediador de $[BV]$ com o eixo Oy ?

(A) $(0\,,-1\,,0)$ **(B)** $(0\,,-\frac{1}{2}\,,0)$ **(C)** $(0\,,\frac{1}{2}\,,0)$ **(D)** $(0\,,1\,,0)$

$B(3,1,2)$ $V(x,y,-4)$ Ponto médio $[AC]$

$M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-3+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (1,-1,2)$

$V(1,-1,-4)$

Plano mediador $[BV]$

$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z+4)^2$

$\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-2y+1+\cancel{z^2}-4z+4=$

$=\cancel{x^2}-2x+1+\cancel{y^2}+2y+1+\cancel{z^2}+8z+16$

$-4x-4-4y-12z=0$

$-4x-4y-12y-4=0$

$x+y+3y+1=0$ intersecção com o eixo Oy então $x=0$ e $z=0$

$y+1=0 \Leftrightarrow y=-1$

$(0,-1,0)$

6. Num referencial o.n. $Oxyz$ qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano yOz.

Raio $=3$

(A) $(x-3)^2+y^2+(z+1)^2=9$ **(B)** $(x-3)^2+y^2+(z+1)^2=4$

(C) $x^2+(y-2)^2+z^2=4$ **(D)** $x^2+(y-2)^2+z^2=9$

7. Num referencial o.n. $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, considera os vetores não nulos $\vec{u}(3k, k^2 - 4, k + 4)$ e $\vec{v} = 2\vec{e_1} + k\vec{e_3}$, com $k \in \mathbb{R}$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se:

$\vec{v}(2, 0, k)$

(A) $k = -2$ **(B)** $k = -\frac{4}{3}$ **(C)** $k = \frac{4}{3}$ **(D)** $k = 2$

$\vec{u} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow (3k, k^2-4, k+4) = \lambda(2, 0, k)$

$\begin{cases} 3k = 2\lambda \\ k^2 - 4 = 0 \\ k + 4 = \lambda k \end{cases}$ $\begin{cases} 6 = 2\lambda \\ k = 2 \\ 6 = 2\lambda \end{cases}$ $\vee$ $\begin{cases} -6 = 2\lambda \\ k = -2 \\ 2 = -2\lambda \end{cases}$ Impossível

$\begin{cases} \lambda = 3 \\ k = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$ $k = 2$

8. Num referencial o.n. $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$, considera os vetores não nulos $\vec{u}(k^2 - 1, k, k)$ e $\vec{v} = 2\vec{e_1} + k\vec{e_2} + \vec{e_3}$, com $k \in \mathbb{R}$

8.1) Sabe-se que $k = -2$, então $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 10$

Quais são os restantes não nulos de k de modo que $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 10$

(A) $-1 - \sqrt{2}$ e $-1 + \sqrt{2}$

(B) $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$

(C) $-1 - \sqrt{3}$ e $-1 + \sqrt{3}$

(D) $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$

$\vec{v}(2, k, 1)$

$\vec{u} - \vec{v} = (k^2 - 3, k - k, 1 - k) = (k^2 - 3, 0, 1 - k)$

$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 10 \Leftrightarrow \left(\sqrt{(k^2-3)^2 + (1-k)^2}\right)^2 = 10$

$$(k^2-3)^2+(1-k)^2=10$$

$$k^4-6k^2+9+1-2k+k^2=10$$

$$k^4-5k^2-2k=0$$

$$k(k^3-5k-2)=0$$

$$k=0 \vee k^3-5k-2=0$$

Como -2 é solução de $\|\vec{u}-\vec{v}\|=10$ então também é de $k^3-5k-2=0$

	1	0	-5	-2
-2		-2	4	2
	1	-2	-1	0

$$(k+2)(k^2-2k-1)=0$$

Assim,

$$k=0 \vee k+2=0 \vee k^2-2k-1=0$$

$$k=0 \vee k=-2 \vee k=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}$$

$$k=0 \vee k=-2 \vee k=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$$

$$k=0 \vee k=-2 \vee k=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$k=0 \vee k=-2 \vee k=1+\sqrt{2} \vee k=1-\sqrt{2}$$

8.2) A reta AB, com $A(1, 0, -2)$ e $B(7, 4, 2)$ tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$

Quais são os valores k?

(A) $k = \frac{1}{2} \vee k = 2$

(B) $k = -2 \vee k = \frac{1}{2}$

(C) $k = -\frac{1}{2} \vee k = 2$

(D) $k = -2 \vee k = -\frac{1}{2}$

$\vec{u}\,(k^2-1, k, k)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (7, 4, 2) - (1, 0, -2) = (6, 4, 4)$

$\vec{u} = \lambda \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow (k^2-1, k, k) = \lambda(6, 4, 4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 1 = 6\lambda \\ k = 4\lambda \\ k = 4\lambda \end{cases}$ $\quad \begin{cases} k^2 - 1 = 6\frac{k}{4} \\ \hline \lambda = \frac{k}{4} \end{cases}$

$k^2 - \frac{3}{2}k - 1 = 0$

$2k^2 - 3k - 2 = 0$

$k = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$ $\quad \frac{3+5}{4} = 2$ $\quad \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2}$

9. Num referencial o.n. *Oxyz* a superfície esférica definida por $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 6$ e o ponto $A(a\,,a\,,a)$, com $a \in \mathbb{R}^+$, pertence à superfície esférica.

9.1) Qual das seguintes pode ser uma equação vetorial da reta que contém um diâmetro da superfície esférica e o ponto A ?

$C(0,-2,1)$

(A) $(x\,,y\,,z) = (0\,,-2\,,1) + k(-1\,,-7\,,2)\,, k \in \mathbb{R}$

(B) $(x\,,y\,,z) = (-1\,,-7\,,2) + k(0\,,-2\,,1)\,, k \in \mathbb{R}$

(C) $(x\,,y\,,z) = (-1\,,-1\,,-1) + k(1\,,-1\,,2)\,, k \in \mathbb{R}$

(D) $(x\,,y\,,z) = (0\,,-1\,,2) + k(-1\,,-1\,,-1)\,, k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} a = -k \\ a = -2-7k \\ a = 1+2k \end{cases}$ $\begin{cases} k = -a \\ a = -2-7a \\ a = 1-2a \end{cases}$

$\begin{cases} k = -a \\ a = 1/3 \\ a = 1/3 \end{cases}$

9.2) Seja B o ponto da superfície esférica diametralmente oposto ao ponto A
Quais são as coordenadas do ponto B ?

(A) $(-3\,,1\,,5)$ **(B)** $\left(-\frac{1}{3}\,,-\frac{11}{3}\,,\frac{5}{3}\right)$ **(C)** $\left(-\frac{2}{3}\,,-\frac{20}{3}\,,\frac{7}{3}\right)$ **(D)** $(1,-3\,,3)$

$A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $B = C + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (0, -2, 1) - (1/3, 1/3, 1/3) =$

$= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$B = (0, -2, 1) + \left(-\frac{1}{3}, -5/3, 2/3\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, \frac{5}{3}\right)$

B

9.3) Considera a reta s definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$x = -2 + k \ \wedge y = -4 + k \ \wedge z = 3\,, k \in \mathbb{R}$$

A reta s interseta a superfície esférica nos pontos P e Q. Qual o valor de $d(P, Q)$?

(A) 1 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** 4

$$\begin{cases} x = -2+k \\ y = -4+k \\ z = 3 \end{cases}$$

$$(-2+k)^2 + (-4+k+2)^2 + (3-1)^2 = 6$$

$$4 - 4k + k^2 + 4 - 4k + k^2 + 4 = 6$$

$$2k^2 - 8k + 6 = 0$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

$$k = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$k = 3 \quad (1, -1, 3)$

$k = 1 \quad (-1, -3, 3)$

$$d(P, Q) = \sqrt{(1+1)^2 + (-1+3)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

$\boxed{C}$

10. Na figura 3 está representada em referencial o.n. *Oxyz* a pirâmide [*ABCDE*]

Sabe-se que:

- O ponto *B* pertence ao plano *xOz*
- O ponto *D* pertence ao eixo *Oy*
- $\overrightarrow{BE}(-3\,,8\,,1)$ e $\overrightarrow{DE}(1\,,7\,,5)$

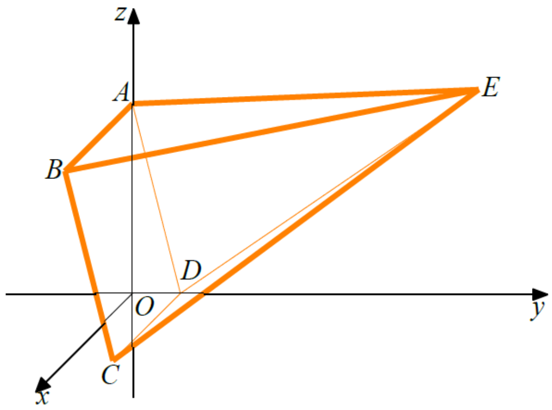


Figura 3

Quais são as coordenadas do ponto *B* ?

(A) $(3\,,0\,,4)$ **(B)** $(2\,,0\,,2)$ **(C)** $(3\,,0\,,3)$ **(D)** $(4\,,1\,,4)$

$B(x,0,z) \quad D(0,y,0)$

$E = B + \overrightarrow{BE} \qquad E = D + \overrightarrow{DE}$

$(x,y,z) = (x,0,z) + (-3,8,1) = (x-3,\ 8,\ z+1)$

$(x,y,z) = (0,y,0) + (1,7,5) = (1,y+7,5)$

$\begin{cases} x-3=1 \\ 8=y+7 \\ z+1=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases} \qquad (4,1,4)$

$\boxed{D}$

11. Na figura 4 está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$, com as faces paralelas aos planos coordenados.

Sabe-se que:

- Os pontos E e H são simétricos em relação ao plano yOz
- $E(2\,,-4\,,1)$
- O ponto B pertence à reta definida por $y = 3\ \wedge z = -2$

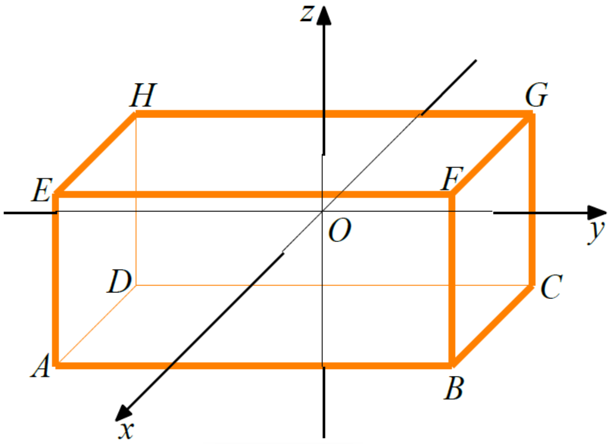


Figura 4

11.1 Usando as letras da figura 4, identifica o conjunto de pontos definido pelas seguintes condições:

a) $3z + 3(x - 1) = 3x$

$3z + \cancel{3x} - 3 = \cancel{3x}$

$3z = 3 \Leftrightarrow z = 1$

Plano EFG

b) $x = -2\ \wedge\ y = 3$

Reta CG

c) $x = 2\ \wedge z = -2\ \wedge\ -4 \leq y \leq 3$

Segmento de reta [AB]

11.2 Define por uma condição em $\mathbb{R}^3$

a) o plano ABF

$x = 2$

b) a reta que contém a aresta $[HG]$

$x = -2\ \wedge z = 1$

c) a face $[DCGH]$

$x = -2 \wedge -4 \leq y \leq 3$

$\wedge -2 \leq z \leq 1$

d) a semirreta $A\dot{D}$

$y = -4\ \wedge z = -2\ \wedge$

$x \geq -2$

e) o plano mediador do segmento de reta [*AE*]

$z = 0$

f) o plano mediador do segmento de reta [*AG*]

$A(2, -4, -2) \quad G(-2, 3, 1)$

$(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2$

$\cancel{x^2} - 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} + 8y + 16 + \cancel{z^2} + 4z + 4 =$

$= \cancel{x^2} + 4x + \cancel{4} + \cancel{y^2} - 6y + 9 + \cancel{z^2} - 2z + 1$

$-4x - 4x + 8y + 6y + 4z + 2z + 20 - 10 = 0$

$-8x + 14y + 6z + 10 = 0$

$-4x + 7y + 3z + 5 = 0$

$4x - 7y - 3z = 5$ //

g) a reta paralela a *AE* que contém o ponto *Q* , simétrico de *D* em relação eixo *Ox*

$x = -2 \wedge y = 4$

11.3 Seja *Q* o ponto simétrico de *C* em relação ao plano de equação $y = -2$

Determina as coordenadas do ponto *P* , pertencente à reta *FB* , tais que $d(P, Q) = 6\sqrt{5}$

$C(-2, 3, -2) \quad Q(-2, -7, -2)$

Reta FB: $x = 2 \wedge y = 3$ Logo $P(2, 3, z)$

$d(P, Q) = 6\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(2+2)^2 + (3+7)^2 + (z+2)^2} = 6\sqrt{5}$

$z^2 + 4z + 4 + 4 + 16 + 100 = 36 \times 5 \Leftrightarrow z^2 + 4z - 60 = 0$

$z = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 240}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-4 \pm 16}{2}$ < -10 / 6

$P(2, 3, -10)$ ou $P(2, 3, 6)$

12. Na figura 5 está representado num referencial o.n. $Oxyz$, o octaedro $[ABCDEF]$ tais que G é o seu centro.

Sabe-se que:

- O quadrado $[ACEF]$ está contido no plano xOy
- O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto C ao eixo Oz
- Os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica

  de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$

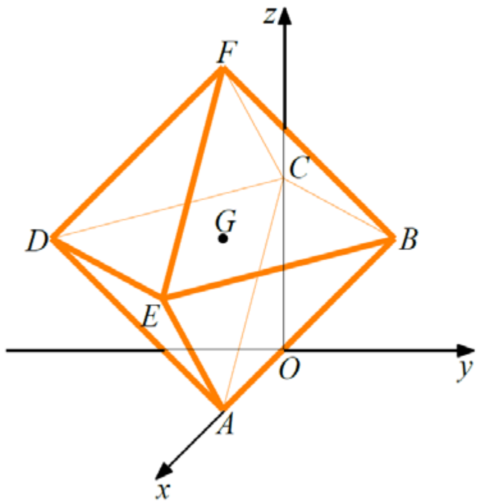


Figura 5

12.1) Determina as coordenadas dos vértices do octaedro

$x^2-4x+y^2+z^2-4z+4=0$

$x^2-4x+4-4+y^2+z^2-4z+4=0$

$(x-2)^2+y^2+(z-2)^2=4$ $\quad G(2,0,2)$

$A(2,0,0)$ $\quad B(2,2,2)$

$C(0,0,2)$ $\quad D(2,-2,2)$

$E(4,0,2)$ $\quad F(2,0,4)$

12.2) Define por uma condição em $\mathbb{R}^3$:

a) o plano ABF

$x=2$

b) o segmento de reta $[EG]$

$y=0 \wedge z=2 \wedge 2 \leq y \leq 4$

c) a reta paralela ao eixo *Ox* que contém o ponto *B*

$$x = 2 \wedge y = 2$$

d) o plano perpendicular a *Oy* que contém o ponto *D*

$$z = -2$$

e) a esfera de diâmetro [*OG*]

$O(0,0,0) \qquad G(2,0,2)$

$\overrightarrow{OG} = (2,0,2) \qquad \|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Centro $\quad I = G + \frac{1}{2}\overrightarrow{GO} = (2,0,2) + \frac{1}{2}(-2,0,-2)$

$= (2,0,2) + (-1,0,-1) = (1,0,1)$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 2$$

12.3) O plano mediador do segmento de reta [*OE*] interseta a reta paralela a *Ox* que contém o ponto *D* num ponto *P*. Determina as suas coordenadas. $\quad P(x,-2,2)$

$x^2 + y^2 + z^2 = (x-4)^2 + y^2 + (z-2)^2$

$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} + \cancel{z^2} - 4z + 4$

$- \quad x + 16 - 4z + 4 = 0$

$-8x - 4z + 20 = 0$

$-2x - z + 5 = 0$

Para $z = 2$

$-2x - 2 + 5 = 0 \qquad P\left(\frac{3}{2}, -2, 2\right)$

$x = 3/2$

12.4) O plano de equação $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$ divide o octaedro em dois sólidos tais que um tem o dobro do volume do outro. Mostra que $a = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3} \vee a = 4 - \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$

$A(2,0,0)$ $B(2,2,2)$ $C(0,0,2)$
$D(2,-2,2)$ $E(4,0,2)$ $F(2,0,4)$
$G(2,0,2)$.

$a \in [0,2]$. A secção definida pelo plano $x=a$ é um quadrado $[PQRS]$.

Assim V de $[ABEDFPQRS]$ é o dobro de $V_{[PQRSC]}$. Portanto o volume da pirâmide é $1/3$ do volume do octaedro

$V_{octaedro} = 2\,V_{[BCDEF]} = 2 \times \frac{1}{3} A_{[BCDE]} \times \overline{FG}$

$= \frac{2}{3} A_{[BCDE]} \times \overline{FG} = \frac{2}{3} \frac{\overline{BD} \times \overline{CE}}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = \frac{2}{3} \times 4 \times 4 = \frac{32}{3}$

$V_{[PQRSC]} = \frac{1}{3} V_{oct} \Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{3}} A_{[PQRS]} \times \overline{CH} = \cancel{\frac{1}{3}} \times \frac{32}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{\overline{PR} \times \overline{QS}}{2} \times a = \frac{32}{3}$

Os triângulos $[PCR]$ e $[BCD]$ são semelhantes

$\frac{\overline{BD}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}} \Leftrightarrow \frac{4}{\overline{PR}} = \frac{2}{a} \Leftrightarrow \overline{PR} = 2a \Rightarrow \overline{QS} = 2a$

$\frac{\overline{PR} \times \overline{QS}}{2} \times a = \frac{32}{3} \Leftrightarrow \frac{2a \times \cancel{2}a}{\cancel{2}} \times a = \frac{32}{3} \Leftrightarrow$

$2a^3 = \frac{32}{3} \Leftrightarrow a^3 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{\frac{16}{3}} \Leftrightarrow$

$a = \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} \Leftrightarrow a = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$

Para o intervalo $[2,4]$ tem-se de forma análoga o mesmo sucedido com $4 - \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$

13. Na figura 6 está representado num referencial o.n. *Oxyz* um sólido constituído por um prisma retangular [*ABCDEFGH*] e um prisma triangular reto [*EFGHIJ*]

Sabe-se que:

- A face [*ABCD*] é paralela ao eixo *xOy*
- A face [*ADHE*] é paralela ao eixo *xOz*
- $D(-2\,,1\,,-2)$ e $F(3\,,3\,,5)$
- A face [*EFGH*] é ao comum ao prisma retangular e ao prisma triangular reto
- O volume do sólido é 100

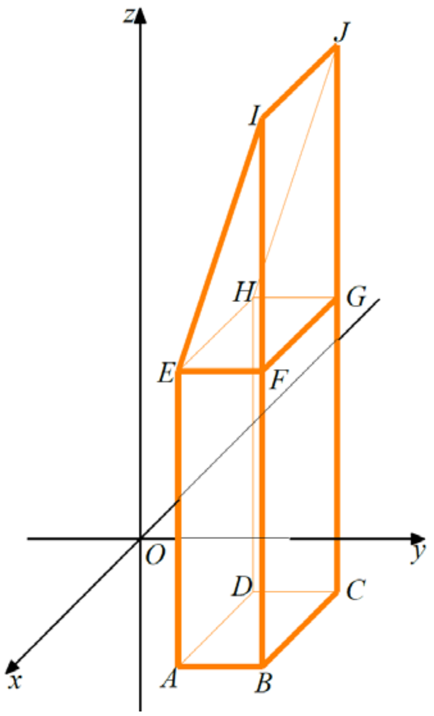


Figura 6

13.1) Mostra que as coordenadas dos pontos *I* e *J* são $(3\,,3\,,11)$ e $(-2\,,3\,,11)$, respetivamente.

$V_{sólido} = V_{prisma} + V_{prisma\ retangular\ reto}$

$V_P = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{CG} = 2 \times 5 \times 7 = 70$

Assim

$V_S = V_P + V_{PTR} \Leftrightarrow 100 = 70 + \frac{\overline{EF} \times \overline{FI}}{2} \times \overline{FG}$

$\Leftrightarrow 30 = \frac{\cancel{2} \times \overline{FI}}{\cancel{2}} \times 5 \Leftrightarrow \overline{FI} = 6$

$I(3, 3, z)$ e $J(-2, 3, z)$

$F(3, 3, 5)$ logo $I(3, 3, 5+6) = (3, 3, 11)$

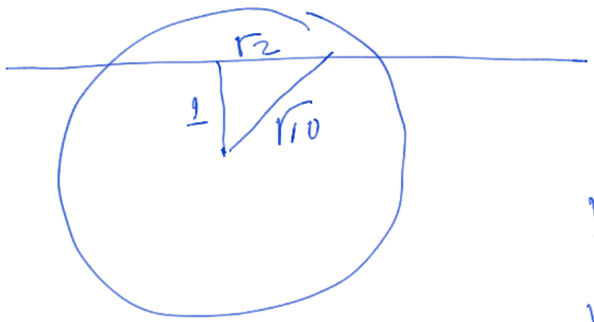
e $J(-2, 3, 11)$

13.2) Identifica a secção definida na superfície esférica $x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$ pelo corte segundo o plano *ABC*. Determina o seu perímetro.

$C_1(0, 2, -3)$ raio $\sqrt{10}$

circunferência contida no plano ABC

Centro $(0, 2, z)$ como z é igual ao da face ABC então $C_2(0, 2, -2)$



$(\sqrt{10})^2 = 1^2 + r_2^2$

$r_2^2 = 9$

$r_2 = 3$

$x^2 + (y-2)^2 = 9$

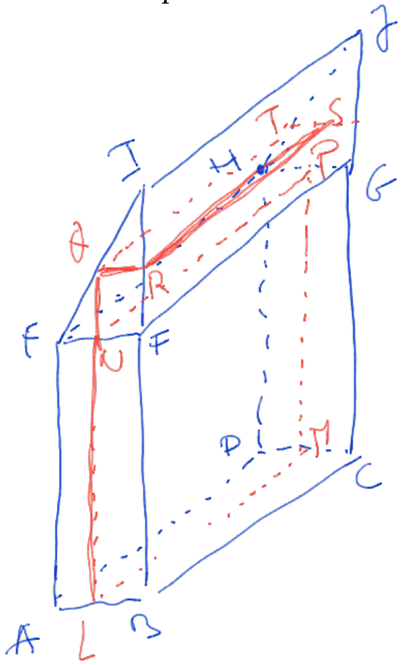
Perímetro: 6π

13.3) O plano de equação $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$ divide o sólido em dois sólidos de igual volume.

Qual o valor de b ?

Apresenta o resultado arredondado às centésimas

$b \in [1, 3]$



O volume de $[ALMDFNPHQT]$ é metade do volume total.

Assim

$$\overline{AL} \times \underbrace{\overline{LN}}_{7} \times \underbrace{\overline{LM}}_{5} + \frac{\overline{EN} \times \overline{NQ}}{2} \times \underbrace{\overline{NP}}_{5} = 50$$

$$\overline{AL} \times 7 \times \cancel{5} + \frac{\overline{EN} \times \overline{NQ}}{2} \times \cancel{5} = \underbrace{50}_{10}$$

$$7\overline{AL} + \frac{\overline{EN} \times \overline{NQ}}{2} = 10$$

Os triângulos $[EFI]$ e $[ENQ]$ são semelhantes.

$$\frac{\overline{EN}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{NQ}}{\overline{FI}} \Leftrightarrow \frac{\overline{EN}}{2} = \frac{\overline{NQ}}{6} \Leftrightarrow \overline{NQ} = 3\overline{EN}$$

$$7\overline{EN} + \frac{\overline{EN} \times 3\overline{EN}}{2} = 10 \Leftrightarrow 14\overline{EN} + 3\overline{EN}^2 = 20$$

$$3\overline{EN}^2 + 14\overline{EN} - 20 = 0 \Leftrightarrow \overline{EN} = \frac{-14 \pm \sqrt{436}}{6} \Leftrightarrow$$

$\overline{EN} = 1,146 \simeq 1,15$ $\quad b \in [1,3]$ logo $b = 1 + 1,15$

$= 2,15$ //

14. Num referencial o.n. *Oxyz* considera que o ponto A , de coordenadas $(a\ ,b\ ,c)$, com $a, b, c\ \in \mathbb{R}$, pertence à superfície esférica centrada na origem e raio $2\sqrt{2}$

14.1) Mostra que o ponto B , de coordenadas $(2b+3\ ,b-2c\ ,-3a)$, pertence à superfície esférica centrada no ponto $(3\ ,b\ ,-a)$ e raio $4\sqrt{2}$

$A(a,b,c)$ com $x^2+y^2+z^2=8$ é a superfície esférica de raio $2\sqrt{2}$ e A pertence à superfície esférica, então $a^2+b^2+c^2=8$.

$$(2b+\cancel{3}-\cancel{3})^2+(\cancel{b}-2c-\cancel{b})^2+(-3a+a)^2=32$$

$$4b^2+4c^2+4a^2=32$$

$$a^2+b^2+c^2=8$$

logo B pertence à superfície esférica

14.2) Supõe que a, b e c são números inteiros consecutivos com $a<b<c$ e seja $\mathcal{E}$ a esfera de raio 3 centrada em A tais que o ponto C , de coordenadas $(2\ ,0\ ,5)$, pertence à superfície esférica que a limita.

a) Mostra que uma condição que define a esfera $\mathcal{E}$ é $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5\leq 0$

b) Identifica a secção definia na esfera $\mathcal{E}$ pelo corte segundo o plano de equação $2x + 1 = 0$.

Determina a sua área.

c) Seja P um ponto pertencente à reta definida pela condição $x = 0 \ \wedge z = 1$

Entre que valores deve variar a coordenada do ponto P de modo que este pertença ao interior da esfera $\mathcal{E}$?

15. Num referencial o.n. $(O\,,\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3}\,)$, considera os vetores $\vec{u}(1\,,-3\,,2)$ e $\vec{v} = 2k\overrightarrow{e_1} - k\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3}$, e os pontos $P(1\,,-2\,,0)$ e $Q(k\,,k\,,k-1)$, com $k \in \mathbb{R}$

$\vec{v}(2k, -k, -1)$

15.1 Determina k de modo que:

$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (k, k, k-1) - (1, -2, 0)$

a) $\|\overrightarrow{PQ} + \vec{v}\| = 3$

$= (k-1, k+2, k-1)$

$\overrightarrow{PQ} + \vec{v} = (k-1, k+2, k-1) + (2k, -k, -1) =$

$= (3k-1, 2, k-2)$

$(3k-1)^2 + 4 + (k-2)^2 = 9 \Leftrightarrow 9k^2 - 6k + 1 + 4 + k^2 - 4k + 4 = 9$

$10k^2 - 10k = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = \underline{1}$

b) $\vec{v} - \vec{u} + 3\overrightarrow{QP} = (k^2\,, k^2+1\,, -3k)$

$\overrightarrow{PQ} = (k-1, k+2, k-1)$

$\overrightarrow{QP} = (1-k, -k-2, 1-k)$

$3\overrightarrow{QP} = (3-3k, -3k-6, 3-3k)$

$\vec{v}(2k, -k, -1)$

$\vec{u}(1, -3, 2)$

$(2k, -k, -1) - (1, -3, 2) + (3-3k, -3k-6, 3-3k)$

$(2k-1+3, -k+3-3k-6, 3-3k) =$

$(2k+2, -4k-3, 3-3k) = (k^2, k^2+1, -3k)$

$2k+2-k^2=0\ ,\ k^2+1+4k+3=0\ ,\ 3-3k=-3k$

c) O vetor $\overrightarrow{PQ} + \vec{u}$ seja colinear com o vetor $\vec{w}(1\,, -3\,, 5)$

$\overrightarrow{PQ} + \vec{u} = (k, k-1, k+1)$

$(k, k-1, k+1) = \lambda(1, -3, 5)$

$\begin{cases} k = \lambda \\ k-1 = -3k \\ k+1 = 5k \end{cases}$ $\begin{cases} k = \lambda \\ k = 1/4 \\ k = 1/4 \end{cases}$ $k = 1/4$

15.2 Considera $k = -1$. Determina o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \alpha\vec{u} + \beta\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$$

$\overrightarrow{PQ} = (k-1, k+2, k-1)$

$\overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -2)$

$\alpha(1, -3, 2) + \beta(1, -3, 2) = (-2, 1, -2)$

$\begin{cases} \alpha+\beta = -2 \\ -3\alpha - 3\beta = 1 \\ 2\alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$ Impossível

Falsa

16. Na figura 7 está representado num referencial o.n. *Oxyz* um prisma triangular [*ABCDEF*]

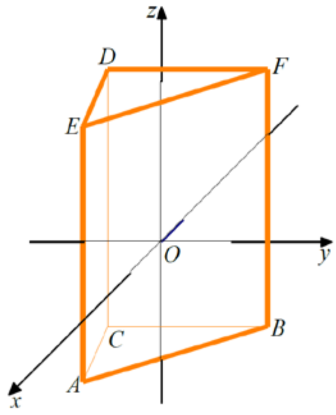


Figura 7

Sabe-se que:

- A base [*ABC*] está contida no plano de equação $z = 3$ e a base [*DEF*] está contida no plano de equação $z = 5$
- A face [*BFDC*] é paralela ao plano *yOz*
- $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{89}$
- Uma equação vetorial da reta *AF* é $(x, y, z) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8), k \in \mathbb{R}$

16.1 Mostra que as coordenadas do ponto *A* são $(4, -1, -3)$, que as do ponto *F* são $(-1, 3, 5)$ e determina as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

$(x, y, z) = (-6, 7, 13) + k(-5, 4, 8)$

$\begin{cases} x = -6 - 5k \\ y = 7 + 4k \\ z = 13 + 8k \end{cases}$ Como para A $z = -3$

então $-3 = 13 + 8k \Leftrightarrow k = -2$

$x = -6 + 10 = 4$ e $y = 7 - 8 = -1$

$A(4, -1, -3)$

Como para F, $z = 5$ então

$5 = 13 + 8k \Leftrightarrow k = -1$.

Assim, $x = -6 + 5 = -1$ e

$y = 7 - 4 = 3$. $F(-1, 3, 5)$

$B(-1, 3, -3)$ $C(-1, -2, -3)$ $D(-1, -2, 5)$

$E(4, -1, 5)$

16.2 Escreve uma equação vetorial da reta *EB* e determina a sua interseção com o plano *xOz*

$$\overrightarrow{EB} = B - E = (-1, 3, -3) - (4, -1, 5)$$
$$= (-5, 4, -8)$$

$$(x, y, z) = (-1, 3, -3) + k(-5, 4, -8)$$

Plano xOz $y = 0$

$$(x, 0, z) = (1, 3, -3) + k(-5, 4, -8)$$

$$\begin{cases} x = -1 - 5k \\ 0 = 3 + 4k \\ z = -3 - 8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{15}{4} \\ k = -\frac{3}{4} \\ z = -3 + \frac{24}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ k = -3 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\frac{11}{4}, 0, 3\right)$$

16.3 Determina:

a) um sistema de equações paramétricas que defina a reta *AB*

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 3, -3) - (4, -1, -3)$$
$$= (-5, 4, 0)$$

$$(x, y, z) = (4, -1, -3) + k(-5, 4, 0)$$

$$\begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = -1 + 4k \\ z = -3 \end{cases}$$

b) uma equação vetorial da aresta [*DF*] $\overrightarrow{DF} = F - D = (0, 5, 0)$

$$(x, y, z) = (-1, -2, 5) + k(0, 5, 0), \; k \in [0, 1]$$

c) o plano mediador do segmento de reta $[AF]$.

Apresenta na forma $ax + by + cz = d$ *,* $com\ a, b, c\ e\ d\ \in \mathbb{R}$

$A(4,-1,-3)$

$F(-1,3,5)$

$(x-4)^2+(y+1)^2+(z+3)^2=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2$

$\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+2y+1+\cancel{z^2}+6z+9=$

$=\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-6y+9+\cancel{z^2}-10z+25$

$-8x-2x+16-1+2y+6y+1-9+6z+10z+9-25$

$-10x+8y+16z-9=0$

$-10x+8y+16z=9$ //

16.4 Determina as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ colinear com $\overrightarrow{AD}$ e de norma 30

16.5 Considera os pontos $P(-5\,,-2\,,1)$ e $T(-1\,,3\,,1)$. Sabe-se que o ponto *T* pertence ao plano *AEF* e que o vetor $\overrightarrow{PT}$ é perpendicular ao plano *AEF*.

a) Mostra que uma equação do plano *AEF* é $4x + 5y = 11$

b) Seja *r* a reta que contém o ponto de coordenadas $(1\,,1\,,3)$ é paralela ao eixo *Ox*.
Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano *AEF* com a reta *r*.

16.6 Considera um novo prisma semelhante ao prisma [*ABCDEF*]. Sabe-se que a área da base do novo prisma é igual a 50. Qual é o volume do novo prisma?

1. C

2.1 D

2.2 a) $y = 3 \wedge z = -3$

2.2 b) $x = 3$

2.2 c) $x = 3 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq y \leq 3$

2.2 d) $x = 3 \wedge y = 3 \wedge z \leq 3$

2.2 e) $x = 0 \wedge z = 3 \wedge y \geq 0$

2.2 f) $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

2.2 g) $x = 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

2.2 h) $0 \leq x \leq 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

3. C

4.1 B

4.2 A

5.1 C

5.2 D

5.3 B

5.4 D

5.5 A

6. A

7. D

8.1 B

8.2 C

9.1 A

9.2 B

9.3 C

10. D

11.1 a) Plano *EFG*

11.1 b) Reta *CG*

11.1 c) Segmento de reta [*AB*]

11.2 a) $x = 2$

11.2 b) $x = -2 \wedge z = 1$

11.2 c) $x = -2 \wedge -4 \leq y \leq 3 \wedge -2 \leq z \leq 1$

11.2 d) $y = -4 \wedge z = -2 \wedge x \geq -2$

11.2 e) $z = -\frac{1}{2}$

11.2 f) $4x - 7y - 3z = 5$

11.2 g) $x = -2 \wedge y = 4$

11.3 $P(2{,}3,-10)$ ou $P(2{,}3{,}6)$

12.1 $A(2{,}0{,}0)$; $B(2{,}2{,}2)$; $C(0{,}0{,}2)$; $D(2,-2{,}2)$; $E(4{,}0{,}2)$; $F(2{,}0{,}4)$

12.2 a) $x = 2$

12.2 b) $y = 0 \wedge z = 2 \wedge 2 \leq y \leq 4$

12.2 c) $x = 2 \wedge y = 2$

12.2 d) $x = 2 \wedge z = 2 \wedge y \leq 2$

12.2 e) $y = -2$

12.3 $P\left(\frac{3}{2}, -2, 2\right)$

13.2 Circunferência contida no plano *ABC*, centrada no ponto de coordenadas $(0{,}2,-2)$ e raio 3. Perímetro$= 6\pi$

13.3 $b \approx 2{,}15$

14.2 b) Círculo contido no plano de equação $2x + 1 = 0$, centrado no ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$ e raio $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Área $= \frac{27\pi}{4}$

14.2 c) $y_p \in \left]0\,,4\right[$

15.1 a) $k = 0 \vee k = 1$

15.2 b) $k = -2$

15.2 c) $k = \frac{1}{4}$

15.3 Proposição falsa

16.1 $B(-1, 3, -3)$; $C(-1, -2, -3)$; $D(-1, -2, 5)$; $E(4, -1, 5)$

16.2 $(x, y, z) = (-1, 3, -3) + k(-5, 4, -8)\,, k \in \mathbb{R}$; $\left(\frac{11}{4}, 0\,, 3\right)$

16.3 a) $\begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = -1 + 4k \\ z = -3 \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$

16.3 b) $(x, y, z) = (-1, -2, 5) + k(0, 5, 0), k \in [0\,, 1]$

16.3 c) $-10x + 8y + 16z = 9$

16.4 $\vec{v}\left(-5\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 8\sqrt{10}\right)$ ou $\vec{v}\left(5\sqrt{10}, \sqrt{10}, -8\sqrt{10}\right)$

16.5 b) $\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$

16.6 $V_{novo\ prisma} = 800$