Geometria analítica e cálculo vetorial no espaço – Global 2

1. Num referencial o.n. *Oxyz* o ponto $Q(a^2-4\,,\ a^2-2a\,,a+2)$, com $a\in\mathbb{R}$, pertence ao eixo *Oz*.

Qual é o valor de a?

(A) -2 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 4

2. Na figura 1 estão representados num referencial o.n. *Oxyz* os cubos [*ABOEFGJL*] e [*BCDOGHIJ*]

Sabe-se que:

- o ponto *B* pertence ao eixo *Ox*
- os pontos *D* e *E* pertencem ao eixo *Oy*
- o ponto *J* pertence ao eixo *Oz*
- $\overline{OB}=a$

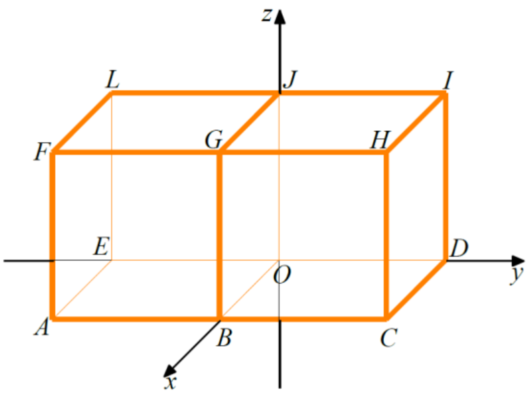

Figura 1

2.1 Qual das seguintes é uma equação do plano mediador do segmento de reta [*AI*]?

(A) $x-y-2z=0$ **(B)** $x+2y-z=0$

(C) $x+y-2z=0$ **(D)** $x-2y-z=0$

2.2 Considera $d(C,L)=3\sqrt{6}$. Escreve uma condição que defina:

a) a reta *FL* **b)** o plano *FGB*

c) o segmento de reta [*BC*] **d)** a semirreta $\dot{C}H$

e) a semirreta $\dot{J}I$ **f)** o quadrado [*BOJG*]

g) a face [*ACHF*] **h)** o sólido [*ACDEFHIJL*]

3. Num referencial o.n. *Oxyz* considera os pontos $A(a\,,b\,,c)$ e $B(-c\,,b\,,-a)$, com $a,b,c\ \in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $a\neq -c$. Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador de [*AB*]?

(A) $(1\,,-1\,,0)$ **(B)** $(0\,,1\,,-1)$ **(C)** $(1\,,0\,,-1)$ **(D)** $(1\,,0\,,1)$

4. Num referencial o.n. *Oxyz* considera os pontos $A(-2\,,2\,,4)$, $B(-1\,,0\,,4)$ e $C(0\,,0\,,4)$

4.1) O plano *ABC* é:

(A) paralelo ao plano *yOz* **(B)** perpendicular ao eixo *Oz*

(C) paralelo ao plano *xOz* **(D)** perpendicular ao eixo *Ox*

4.2) Qual das seguintes é uma condição que define a reta *BC*?

(A) $y=0\ \wedge z=4$ **(B)** $x=-1\ \wedge\ y=0$

(C) $x=0\ \wedge z=4$ **(D)** $y=2\ \wedge z=4$

5. A figura 2 representa num referencial o.n. *Oxyz* a pirâmide quadrangular [*ABCDV*]

Sabe-se que:

- $A(3\,,-3\,,2)$
- $C(-1\,,1\,,2)$
- O volume da pirâmide é 32

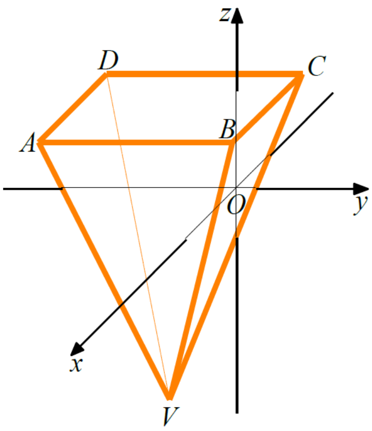

Figura 2

5.1) Qual das equações define o plano paralelo a *ABC* que contém o ponto *V* ?

(A) $z=-6$ **(B)** $x=1$ **(C)** $z=-4$ **(D)** $y=-1$

5.2) Qual dos seguintes pontos pertence ao plano mediador do segmento de reta [*BD*]?

(A) $(3\,,0\,,3)$ **(B)** $(1\,,1\,,2)$ **(C)** $(2\,,-1\,,-2)$ **(D)** $(-5\,,5\,,0)$

5.3) Qual é o conjunto de pontos definido pelo seguinte sistema de equações cartesianas

$y=-3\ \wedge z=2$?

(A) reta *BC* **(B)** reta *AD*

(C) segmento de reta *DC* **(D)** reta *AV*

5.4) Qual é a condição que define o segmento de reta que é a altura da pirâmide?

(A) $x = 3 \wedge y = 1 \wedge -4 \leq z \leq 2$ **(B)** $x = 1 \wedge y = -1 \wedge -6 \leq z \leq 0$

(C) $x = 3 \wedge y = 1 \wedge -6 \leq z \leq 0$ **(D)** $x = 1 \wedge y = -1 \wedge -4 \leq z \leq 2$

5.5) Qual é o ponto de interseção do plano mediador de $[BV]$ com o eixo Oy ?

(A) $(0 , -1 , 0)$ **(B)** $(0 , -\frac{1}{2} , 0)$ **(C)** $(0 , \frac{1}{2} , 0)$ **(D)** $(0 , 1 , 0)$

6. Num referencial o.n. *Oxyz* qual das seguintes equações define uma superfície esférica tangente ao plano *yOz*.

(A) $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$ **(B)** $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4$

(C) $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$ **(D)** $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$

7. Num referencial o.n. $(O , \vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3})$, considera os vetores não nulos $\vec{u}(3k , k^2 - 4 , k + 4)$ e $\vec{v} = 2\vec{e_1} + k\vec{e_2} + \vec{e_3}$, com $k \in \mathbb{R}$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se:

(A) $k = -2$ **(B)** $k = -\frac{4}{3}$ **(C)** $k = \frac{4}{3}$ **(D)** $k = 2$

8. Num referencial o.n. $(O , \vec{e_1} , \vec{e_2} , \vec{e_3})$, considera os vetores não nulos $\vec{u}(3k , k^2 - 4 , k + 4)$ e $\vec{v} = 2\vec{e_1} + k\vec{e_3}$, com $k \in \mathbb{R}$

8.1) Sabe-se que $k = -2$, então $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 10$

Quais são os restantes não nulos de k de modo que $||\vec{u} - \vec{v}||^2 = 10$

(A) $-1 - \sqrt{2}$ e $-1 + \sqrt{2}$ **(B)** $1 - \sqrt{2}$ e $1 + \sqrt{2}$

(C) $-1 - \sqrt{3}$ e $-1 + \sqrt{3}$ **(D)** $1 - \sqrt{3}$ e $1 + \sqrt{3}$

8.2) A reta *AB* , com $A(1 , 0 , -2)$ e $B(7 , 4 , 2)$ tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$

Quais são os valores k?

(A) $k = \frac{1}{2} \vee k = 2$ **(B)** $k = -2 \vee k = \frac{1}{2}$

(C) $k = -\frac{1}{2} \vee k = 2$ **(D)** $k = -2 \vee k = -\frac{1}{2}$

9. Num referencial o.n. *Oxyz* a superfície esférica definida por $x^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 6$ e o ponto $A(a\,,a\,,a)$, com $a \in \mathbb{R}^+$, pertence à superfície esférica.

9.1) Qual das seguintes pode ser uma equação vetorial da reta que contém um diâmetro da superfície esférica e o ponto *A* ?

(A) $(x\,,y\,,z) = (0\,,-2\,,1) + k(-1\,,-7\,,2)\,,k \in \mathbb{R}$

(B) $(x\,,y\,,z) = (-1\,,-7\,,2) + k(0\,,-2\,,1)\,,k \in \mathbb{R}$

(C) $(x\,,y\,,z) = (-1\,,-1\,,-1) + k(1\,,-1\,,2)\,,k \in \mathbb{R}$

(D) $(x\,,y\,,z) = (0\,,-1\,,2) + k(-1\,,-1\,,-1)\,,k \in \mathbb{R}$

9.2) Seja *B* o ponto da superfície esférica diametralmente oposto ao ponto *A*

Quais são as coordenadas do ponto *B* ?

(A) $(-3\,,1\,,5)$ **(B)** $\left(-\frac{1}{3}\,,-\frac{13}{3}\,,\frac{5}{3}\right)$ **(C)** $\left(-\frac{2}{3}\,,-\frac{20}{3}\,,\frac{7}{3}\right)$ **(D)** $(1,-3\,,3)$

9.3) Considera a reta *s* definida pelo seguinte sistema de equações paramétricas:

$$x = -2 + k \ \wedge y = -4 + k \ \wedge z = 3\,,k \in \mathbb{R}$$

A reta *s* interseta a superfície esférica nos pontos *P* e *Q*. Qual o valor de $d(P,Q)$?

(A) 1 **(B)** $\sqrt{2}$ **(C)** $2\sqrt{2}$ **(D)** 4

10. Na figura 3 está representada em referencial o.n. *Oxyz* a pirâmide [*ABCDE*]

Sabe-se que:

- O ponto B pertence ao plano xOz
- O ponto D pertence ao eixo Oy
- $\overrightarrow{BE}(-3\,,8\,,1)$ e $\overrightarrow{DE}(1\,,7\,,5)$

Figura 3

Quais são as coordenadas do ponto B ?

(A) $(3\,,0\,,4)$ **(B)** $(2\,,0\,,2)$ **(C)** $(3\,,0\,,3)$ **(D)** $(4\,,0\,,4)$

11. Na figura 4 está representado num referencial o.n. $Oxyz$ o paralelepípedo $[ABCDEFGH]$, com as faces paralelas aos planos coordenados.

Sabe-se que:

- Os pontos E e H são simétricos em relação ao plano yOz
- $E(2\,,-4\,,1)$
- O ponto B pertence à reta definida por $y = 3\ \wedge z = -2$

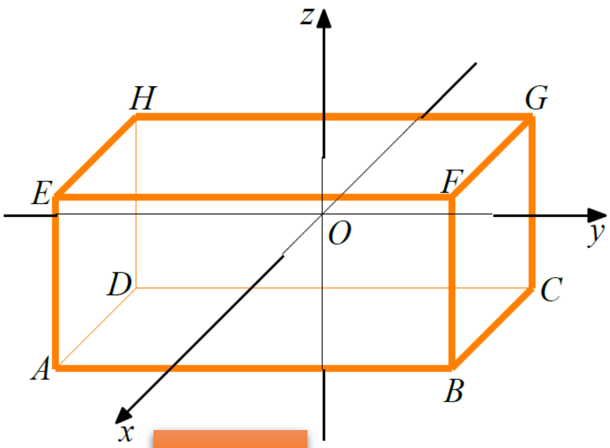

Figura 4

11.1 Usando as letras da figura 4, identifica o conjunto de pontos definido pelas seguintes condições:

a) $3z + 3(x-1) = 3x$

b) $x = -2\ \wedge\ y = 3$

c) $x = 2\ \wedge z = -2\ \wedge\ -4 \leq y \leq 3$

11.2 Define por uma condição em $\mathbb{R}^3$

a) o plano ABF

b) a reta que contém a aresta $[HG]$

c) a face $[DCGH]$

d) a semirreta $A\dot{D}$

e) o plano mediador do segmento de reta $[AE]$

f) o plano mediador do segmento de reta $[AG]$

g) a reta paralela a AE que contém o ponto Q , simétrico de D em relação eixo Ox

11.3 Seja Q o ponto simétrico de C em relação ao plano de equação $y = -2$

Determina as coordenadas do ponto P , pertencente à reta FB , tais que $d(P\,,Q) = 6\sqrt{5}$

12. Na figura 5 está representado num referencial o.n. $Oxyz$, o octaedro $[ABCDEF]$ tais que G é o seu centro.

Sabe-se que:

- O quadrado $[ACEF]$ está contido no plano xOy
- O ponto A pertence ao eixo Ox e o ponto C ao eixo Oz
- Os vértices do octaedro pertencem à superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 4 = 0$

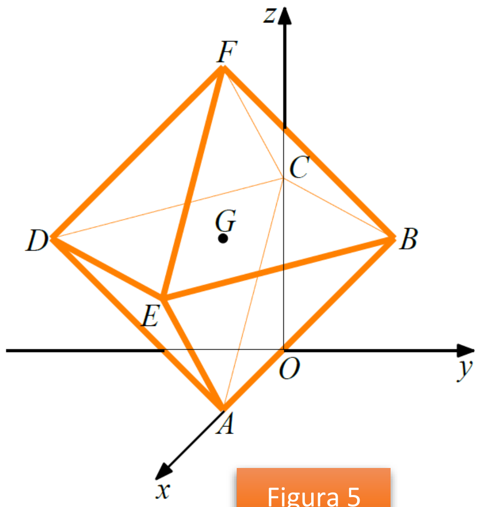

Figura 5

12.1) Determina as coordenadas dos vértices do octaedro

12.2) Define por uma condição em $\mathbb{R}^3$:

a) o plano ABF

b) o segmento de reta $[EG]$

c) a reta paralela ao eixo Ox que contém o ponto B

d) o plano perpendicular a Oy que contém o ponto D

e) a esfera de diâmetro $[OG]$

12.3) O plano mediador do segmento de reta $[OE]$ interseta a reta paralela a Ox que contém o ponto D num ponto P. Determina as suas coordenadas.

12.4) O plano de equação $x = a$, com $a \in \mathbb{R}$ divide o octaedro em dois sólidos tais que um tem o dobro do volume do outro. Mostra que $a = \frac{2\sqrt[3]{18}}{3} \vee a = 4 - \frac{2\sqrt[3]{18}}{3}$

13. Na figura 6 está representado num referencial o.n. *Oxyz* um sólido constituído por um prisma retangular [*ABCDEFGH*] e um prisma triangular reto [*EFGHIJ*]

Sabe-se que:

- A face [*ABCD*] é paralela ao eixo *xOy*
- A face [*ADHE*] é paralela ao eixo *xOz*
- $D(-2\,,1\,,-2)$ e $F(3\,,3\,,5)$
- A face [*EFGH*] é ao comum ao prisma retangular e ao prisma triangular reto
- O volume do sólido é 100

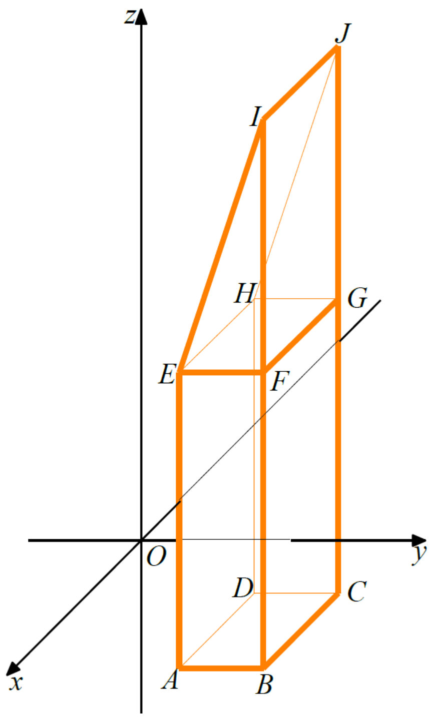

Figura 6

13.1) Mostra que as coordenadas dos pontos *I* e *J* são $(3\,,3\,,11)$ e $(-2\,,3\,,11)$, respetivamente.

13.2) Identifica a secção definida na superfície esférica $x^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 10$ pelo corte segundo o plano *ABC*. Determina o seu perímetro.

13.3) O plano de equação $y = b$, com $b \in \mathbb{R}$ divide o sólido em dois sólidos de igual volume.

Qual o valor de *b* ?

Apresenta o resultado arredondado às centésimas

14. Num referencial o.n. *Oxyz* considera que o ponto *A* , de coordenadas $(a\,,b\,,c)$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, pertence à superfície esférica centrada na origem e raio $2\sqrt{2}$

14.1) Mostra que o ponto B , de coordenadas $(2b+3\,,b-2c\,,-3a)$, pertence à superfície esférica centrada no ponto $(3\,,b\,,-a)$ e raio $4\sqrt{2}$

14.2) Supõe que a, b e c são números inteiros consecutivos com $a<b<c$ e seja $\mathcal{E}$ a esfera de raio 3 centrada em A tais que o ponto C , de coordenadas $(2\,,0\,,5)$, pertence à superfície esférica que a limita.

a) Mostra que uma condição que define a esfera $\mathcal{E}$ é $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z+5\leq 0$

b) Identifica a secção definia na esfera $\mathcal{E}$ pelo corte segundo o plano de equação $2x+1=0$.
Determina a sua área.

c) Seja P um ponto pertencente à reta definida pela condição $x=0\ \wedge z=1$
Entre que valores deve variar a coordenada do ponto P de modo que este pertença ao interior da esfera $\mathcal{E}$?

15. Num referencial o.n. $(O\,,\overrightarrow{e_1}\,,\overrightarrow{e_2}\,,\overrightarrow{e_3}\,)$, considera os vetores $\vec{u}(1\,,-3\,,2)$ e $\vec{v}=2k\overrightarrow{e_1}-k\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}$, e os pontos $P(1\,,-2\,,0)$ e $Q(k\,,k\,,k-1)$, com $k\in\mathbb{R}$

15.1 Determina k de modo que:

a) $\left\|\overrightarrow{PQ}+\vec{v}\right\|=3$

b) $\vec{v}-\vec{u}+3\overrightarrow{QP}=(k^2\,,k^2+1\,,-3k)$

c) O vetor $\overrightarrow{PQ}+\vec{u}$ seja colinear com o vetor $\vec{w}(1\,,-3\,,5)$

15.2 Considera $k=-1$. Determina o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists \alpha,\beta\in\mathbb{R}:\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}=\overrightarrow{PQ}$$

16. Na figura 7 está representado num referencial o.n. *Oxyz* um prisma triangular [*ABCDEF*]

Sabe-se que:

- A base [*ABC*] está contida no plano de equação $z = -3$ e a base [*DEF*] está contida no plano de equação $z = 5$
- A face [*BFDC*] é paralela ao plano *yOz*
- $\|\overrightarrow{BD}\| = \sqrt{89}$
- Uma equação vetorial da reta *AF* é $(x\,,y\,,z) = (-6\,,7\,,13) + k(-5\,,4\,,8)\,,k \in \mathbb{R}$

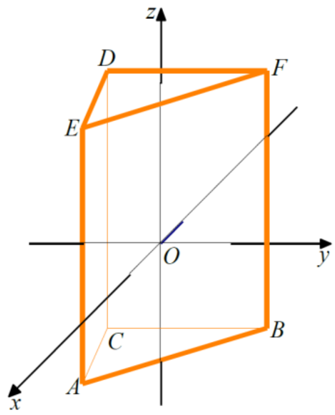

Figura 7

16.1 Mostra que as coordenadas do ponto *A* são $(4\,,-1\,,-3)$, que as do ponto *F* são $(-1\,,3\,,5)$ e determina as coordenadas dos restantes vértices do prisma.

16.2 Escreve uma equação vetorial da reta *EB* e determina a sua interseção com o plano *xOz*

16.3 Determina:

a) um sistema de equações paramétricas que defina a reta *AB*

b) uma equação vetorial da aresta [*DF*]

c) o plano mediador do segmento de reta [*AF*].

Apresenta na forma $ax + by + cz = d$ *,* *com* a, b, c *e* $d \in \mathbb{R}$

16.4 Determina as coordenadas de um vetor $\vec{v}$ colinear com $\overrightarrow{AD}$ e de norma 30

16.5 Considera os pontos $P(-5\,,-2\,,1)$ e $T(-1\,,3\,,1)$. Sabe-se que o ponto *T* pertence ao plano *AEF* e que o vetor $\overrightarrow{PT}$ é perpendicular ao plano *AEF*.

a) Mostra que uma equação do plano *AEF* é $4x + 5y = 11$

b) Seja *r* a reta que contém o ponto de coordenadas $(1\,,1\,,3)$ é paralela ao eixo *Ox*. Determina as coordenadas do ponto de interseção do plano *AEF* com a reta *r*.

16.6 Considera um novo prisma semelhante ao prisma [*ABCDEF*]. Sabe-se que a área da base do novo prisma é igual a 50. Qual é o volume do novo prisma?

Soluções

1. C

2.1 D

2.2 a) $y = 3 \wedge z = -3$

2.2 b) $x = 3$

2.2 c) $x = 3 \wedge z = 0 \wedge 0 \leq y \leq 3$

2.2 d) $x = 3 \wedge y = 3 \wedge z \leq 3$

2.2 e) $x = 0 \wedge z = 3 \wedge y \geq 0$

2.2 f) $y = 0 \wedge 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

2.2 g) $x = 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

2.2 h) $0 \leq x \leq 3 \wedge -3 \leq y \leq 3 \wedge 0 \leq z \leq 3$

3. C

4.1 B

4.2 A

5.1 C

5.2 D

5.3 B

5.4 D

5.5 A

6. A

7. D

8.1 B

8.2 C

9.1 A

9.2 B

9.3 C

10. D

11.1 a) Plano *EFG*

11.1 b) Reta *CG*

11.1 c) Segmento de reta [*AB*]

11.2 a) $x = 2$

11.2 b) $x = -2 \wedge z = 1$

11.2 c) $x = -2 \wedge -4 \leq y \leq 3 \wedge -2 \leq z \leq 1$

11.2 d) $y = -4 \wedge z = -2 \wedge x \geq -2$

11.2 e) $z = -\frac{1}{2}$

11.2 f) $4x - 7y - 3z = 5$

11.2 g) $x = -2 \wedge y = 4$

11.3 $P(2,3,-10)$ ou $P(2,3,6)$

12.1 $A(2,0,0)$; $B(2,2,2)$; $C(0,0,2)$; $D(2,-2,2)$; $E(4,0,2)$; $F(2,0,4)$

12.2 a) $x = 2$

12.2 b) $y = 0 \wedge z = 2 \wedge 2 \leq y \leq 4$

12.2 c) $x = 2 \wedge y = 2$

12.2 d) $x = 2 \wedge z = 2 \wedge y \leq 2$

12.2 e) $y = -2$

12.3 $P\left(\frac{3}{2}, -2, 2\right)$

13.2 Circunferência contida no plano *ABC*, centrada no ponto de coordenadas $(0,2,-2)$ e raio 3. Perímetro= 6π

13.3 $b \approx 2{,}15$

14.2 b) Círculo contido no plano de equação $2x + 1 = 0$, centrado no ponto de coordenadas $\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$ e raio $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Área $= \frac{27\pi}{4}$

14.2 c) $y_p \in \,]0\,,4[$

15.1 a) $k = 0 \vee k = 1$

15.2 b) $k = -2$

15.2 c) $k = \frac{1}{4}$

15.3 Proposição falsa

16.1 $B(-1,3,-3)$; $C(-1,-2,-3)$; $D(-1,-2,5)$; $E(4,-1,5)$

16.2 $(x,y,z) = (-1,3,-3) + k(-5,4,-8)\,, k \in \mathbb{R}$; $\left(\frac{11}{4}, 0\,, 3\right)$

16.3 a) $\begin{cases} x = 4 - 5k \\ y = -1 + 4k \\ z = -3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

16.3 b) $(x,y,z) = (-1,-2,5) + k(0,5,0), k \in [0\,,1]$

16.3 c) $-10x + 8y + 16z = 9$

16.4 $\vec{v}(-5\sqrt{10}, -\sqrt{10}, 8\sqrt{10})$ ou $\vec{v}(5\sqrt{10}, \sqrt{10}, -8\sqrt{10})$

16.5 b) $\left(\frac{3}{2}, 1, 3\right)$

16.6 $V_{novo\ prisma} = 800$