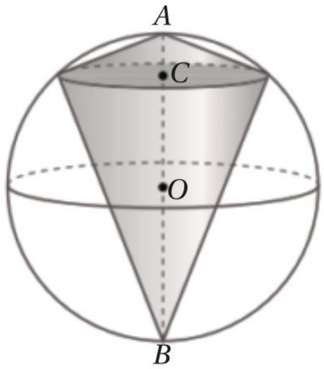
1. Na figura estão representados uma esfera de centro O e raio $5\sqrt{2}$ e um sólido que se pode decompor em dois cones.

Sabe-se, ainda que;

- o volume do sólido que se pode decompor em cones é $\frac{8}{25}$ do volume da esfera;
- o círculo de centro C é a base dos dois cones e é a secção produzida na esfera pelo plano perpendicular a $[AB]$ no ponto C;
- os vértices dos cones são os extremos do diâmetro $[AB]$ da esfera.



1.1 Mostre que $\overline{OC} = 3\sqrt{2}$.

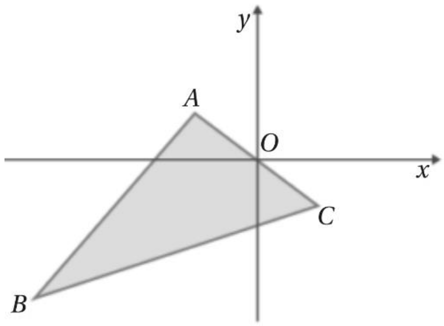
1.2 O plano que passa no centro da esfera e é perpendicular a $[AB]$ divide o cone de vértice B em dois sólidos, um dos quais também é um cone.

Determine a razão entre o volume desse cone e o volume da esfera.

2. Considera, num plano munido de um referencial o.n., o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto O , origem do referencial, é o ponto médio de $[AC]$;
- o vetor $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(-7, -8)$;
- o vetor $\overrightarrow{BC}$ tem coordenadas $(13, 4)$.



2.1 Determine as coordenadas dos pontos A e C .

2.2 Mostre que o ponto B tem coordenadas $(-10, -6)$.

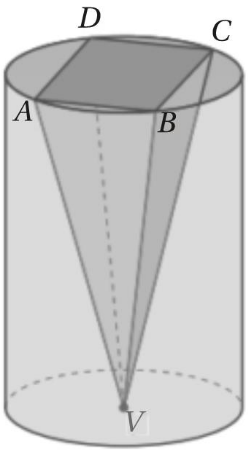
2.3 Define por meio de uma condição o conjunto de pontos do triângulo que pertencem ao terceiro quadrante.

2.4 Considere a circunferência de diâmetro $[AB]$.

a) Determine uma equação da circunferência.

b) Determine as coordenadas dos pontos de interseção da circunferência com dois eixos coordenados, caso existam.

3. Na figura ao lado estão representados um cilindro e uma pirâmide quadrangular regular.



A base da pirâmide está inscrita numa das bases do cilindro e o vértice da pirâmide é o centro da outra base do cilindro.

Sabe-se que:

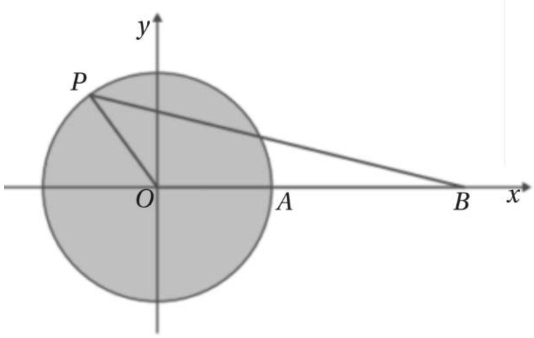
- a altura do cilindro é $\sqrt[3]{256}\ m$;
- a área do base do cilindro é $4\pi\sqrt[3]{2}\ m^2$.

3.1 Se planificarmos a superfície lateral do cilindro, obtemos um retângulo.

Mostre que o seu perímetro é dado, em metros, por $8\sqrt[6]{2}\left(\sqrt{2}+\pi\right)$;

3.2 Mostre que o comprimento, em metros, da aresta da base da pirâmide é $4\sqrt[3]{2}$.

4. Considere, num plano o.n., o círculo de centro na origem do referencial e raio igual a 1.



Sabe-se que $A(1\ ,0)$ e $B(3\ ,0)$.

Seja P um ponto que se move sobre a circunferência, no segundo quadrante, nunca coincidindo com os pontos onde a circunferência interseta os eixos coordenados.

Admite, ainda, que o ponto P tem coordenadas $(a\ ,b)$.

4.1 Prove que a distância entre o ponto P e o ponto B é dada, em função de a, por $\sqrt{10-6a}$.

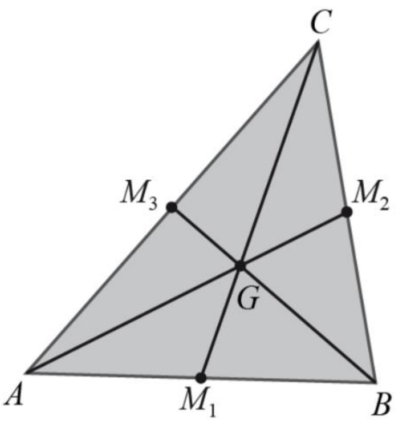
4.2 Considere a circunferência de centro no ponto médio de $[PB]$.

Mostre que uma equação de circunferência é:

$$x^2+y^2-(a+3)x-by+3a=0$$

5. Considere, num plano o.n., o triângulo [*ABC*].

Sejam M_1 , M_2 e M_3 os pontos médios dos lados [*AB*] , [*BC*] e [*CA*] , respetivamente.



5.1 Mostre que, sendo *G* o ponto de interseção das medianas $[AM_2]$ e $[BM_3]$, *G* (designado por baricentro do triângulo) divide $[AM_2]$ e $[BM_3]$ na razão de 2 para 1, ou seja:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_2} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_3}$$

5.2 Mostre que os pontos *C*, *G* e M_1 são colineares e que *G* divide $[CM_1]$ na razão de 2 para 1, isto é:

$$\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_1}$$

6. Sejam *a* e *b* dois números reais positivos.

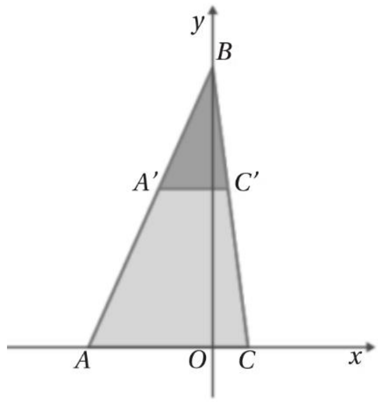
Num plano munido de um referencial ortonormado, considera:

- a reta *r* de equação reduzida $y = \sqrt{a}x + b$;
- a reta *s* de equação reduzida $y = -2ax + b$;
- o ponto *A* , ponto de interseção da reta *r* com o eixo de abcissas ;
- o ponto *B* , o ponto de interseção das retas *r* e *s* ;
- o ponto *C* , o ponto de interseção da reta *s* com o eixo das abcissas.

6.1 Mostre que a área do triângulo [*ABC*] pode ser dada, em função de *a* e de *b*, por:

$$\frac{b^2\left(2\sqrt{a}+1\right)}{4a}$$

6.2 Determine o perímetro do triângulo [*ABC*] , admitindo que este triângulo tem área igual a 36 e o vetor de coordenadas (2 , 3) é paralelo a um dos seus lados.



6.3 Na figura ao lado está representado o triângulo [*ABC*] para o caso de $a = 4$ e $b = 5$.

Os pontos *A'* e *C'* pertencem a [*AB*] e [*BC*] , respetivamente.

Sabe-se que [*ACC'A'*] é um trapézio cuja área é $\frac{8}{9}$ da área do triângulo [*ABC*].

a) Determine as coordenadas dos pontos *A'* e *C'* .

b) Defina por uma condição o trapézio [*ACC'A'*]

7. Considere, num plano o.n., a bissetriz do primeiro quadrante.

Sejam A e B os pontos dessa semirreta com abcissas 1 e 3, respetivamente.

7.1 Seja P um ponto pertencente à mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Sabe-se que a ordenada do ponto P é igual ao dobro da sua abcissa.

Determine as coordenadas do ponto P.

7.2 Considere no mesmo referencial, os pontos A' e B' tais que:

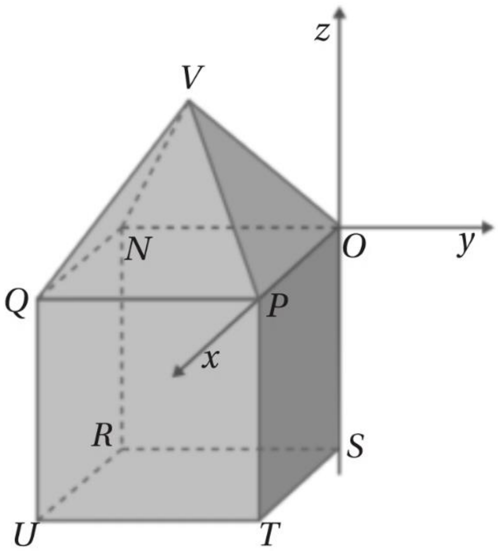
- A' é o ponto simétrico do ponto A em relação à origem do referencial;
- B' é o ponto simétrico do ponto B em relação ao eixo Oy.

a) Determine a equação reduzida da reta AB' .
b) Determine os valores reais de k para os quais o ponto Q de coordenadas $(k\,, k^2)$ pertence à reta AB'.
c) Classifique que o triângulo $[AA'B']$ quanto ao comprimento dos lados e determine o valor exato da sua área.

8. Considere um referencial o.n. $Oxyz$ e o poliedro $[VNOPQRSTU]$ decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base da pirâmide coincide com a face superior do cubo e está contida no plano xOy ;
- o ponto P pertence ao eixo das abcissas;
- o ponto U tem coordenadas $(6\,, -6\,, -6)$;
- o vetor $\overrightarrow{PV}$ tem coordenadas $(-3\,, -3\,, 4)$.



8.1 Escreva um sistema de equações paramétricas da reta US.

8.2 Defina analiticamente o segmento de reta $[NP]$.

8.3 Seja M o ponto médio da aresta $[PT]$.

Determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{RM}$.

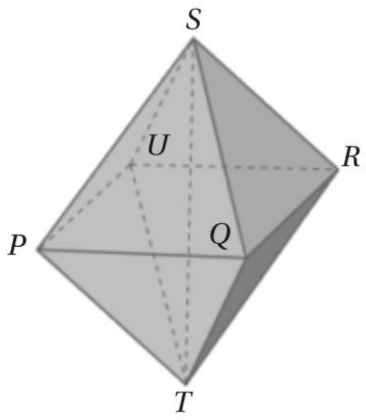
8.4 Determine os números reais a , b e c tais que:

$$\overrightarrow{RM} = a\overrightarrow{TS} + b\overrightarrow{TU} + c\overrightarrow{TP}$$

8.5 Defina analiticamente o plano mediador do segmento de reta $[VT]$.

9. Fixado um referencial o.n., do espaço, os pontos $P(3,0,2)$, $Q(4,3,2)$ e $U(0,1,2)$ são vértices do octaedro regular [*PQRSTU*] representado na figura.

Sabe-se que o vetor $\overrightarrow{TS}$ tem coordenadas $\left(0,0,2\sqrt{5}\right)$.



9.1 Determine as coordenadas dos restantes vértices do octaedro.

9.2 Determine as coordenadas de um vetor $\vec{u}$ colinear com $\overrightarrow{PR}$ e de norma $\sqrt{45}$.

9.3 Defina analiticamente:

a) o plano paralelo ao *xOz* que contém o ponto *Q* ;

b) o plano perpendicular ao eixo *Ox* que contém o ponto médio da aresta [*QR*] ;

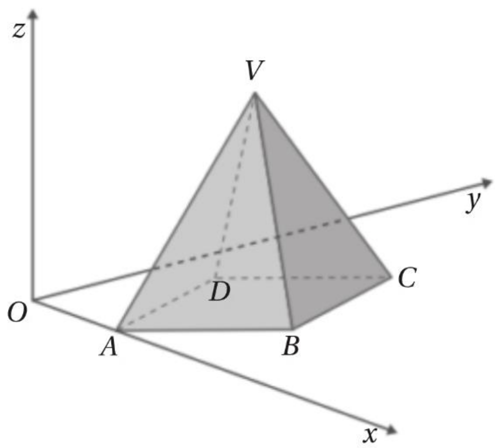
c) a superfície esférica de centro em *U* e que passa no ponto *T*.

9.4 Determine o valor exato do volume do octaedro.

10. Considere um referencial o.n., *Oxyz* e a pirâmide quadrangular [*ABCDV*] cuja base está contida no plano *xOy* .

Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence ao eixo das abcissas e tem abcissa 4 ;
- o ponto *B* tem coordenadas (8 , 3 , 0) ;
- o ponto *D* tem coordenadas (1 , 4 , 0) ;
- o ponto *V* tem cota 6 .



10.1 Determine uma equação vetorial da reta *AB* .

10.2 Defina analiticamente o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao ponto *C* é igual a $\sqrt[4]{8}$.

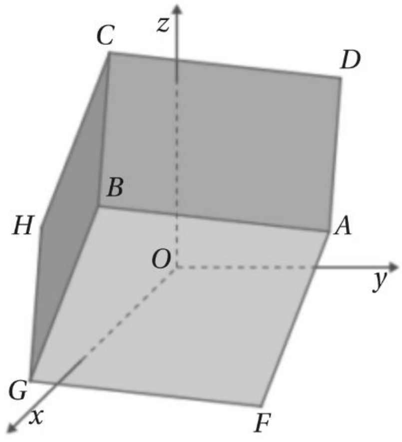
10.3 Defina analiticamente o segmento de reta [*VW*] o ponto simétrico do ponto *V* em relação ao plano *yOz* .

10.4 Determine o valor exato da área total da pirâmide.

11. Considere um referencial o.n., $Oxyz$ e o cubo $[ABCDEFGH]$ (o ponto E não está representado na figura).

Sabe-se, ainda, que:

- o ponto F tem coordenadas $(1 , 3 , -4)$;
- o vetor $\overrightarrow{FA}$ tem coordenadas $(2 ,3 , 6)$;
- o ponto E tem abcissa -5 e cota -1 .



11.1 Escreva uma condição da reta que passa no ponto A e é paralela ao eixo Ox.

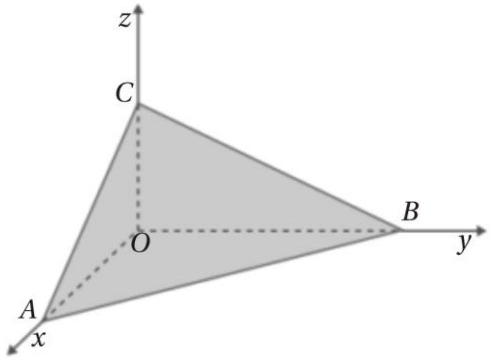
11.2 Determina a ordenada do ponto E .

11.3 Escreva uma condição cartesiana que define a:

a) reta AF ;

b) superfície esférica de centro F à qual pertence o ponto G.

12. Considere, num referencial o.n., $Oxyz$, o tetraedro $[ABCO]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Ox ;
- o ponto B pertence ao eixo Oy ;
- o ponto C pertence ao eixo Oz e tem cota 6 ;
- o triângulo $[ABO]$ é isósceles ;
- o volume do tetraedro $[ABCO]$ é igual a 144 unidades cúbicas.

12.1 Determine as coordenadas dos pontos A e B .

12.2 Seja M o ponto médio do segmento da reta $[AC]$.

Determine uma equação vetorial da reta MB .

12.3 Na figura, o plano ABC é tangente, num ponto P , a uma esfera centrada na origem do referencial. A reta OP é perpendicular ao plano ABC e as suas equações paramétricas, são:

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 2k \end{cases} \quad , \qquad k \in \mathbb{R}$$

Sabe-se, também, que o ponto P tem abcissa 2 .

Determine:

a) a inequação reduzida da esfera ;

b) o valor exato do volume da esfera ;

c) para que valores reais de a a interseção da esfera com o plano de equação $x = a$ é um círculo de raio $2\sqrt{2}$.