FUNÇÕES – TRANSFORMAÇÕES

1. Considere uma função *f* de domínio IR e contradomínio $[-4,2]$

Qual é o contradomínio da função *g* definida por $g(x)=-f(x)+1$

(A) $[-2,4]$ (B) $[-1,5]$ (C) $[-3,3]$ (D) $[-3,1]$

$D'_g=[-(-4+1,2+1)]=[-(-3,3)]=[-3,3]$

OPÇÃO: C

2. Relativamente a uma função *f* real de variável real definida em IR , sabe-se que:

$f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{f(x)}{4}$ e $f(32)=400$

Qual é o valor de $f(2)$?

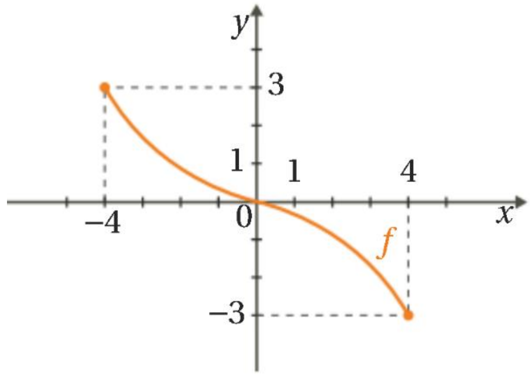
(A) 100 (B) 75 (C) 50 (D) 25

$f(2)=f\left(\frac{8}{4}\right)=\frac{f(8)}{4}$

$f\left(\frac{32}{4}\right)=\frac{f(32)}{4}\Leftrightarrow f(8)=\frac{400}{4}\Leftrightarrow f(8)=100\Leftrightarrow\frac{f(8)}{4}=\frac{100}{4}\Leftrightarrow f(2)=25$

OPÇÃO: D

3. Na figura está representada, num plano munido de um referencial cartesiano, o gráfico de uma função f de domínio $[-4,4]$ e contradomínio $[-3,3]$



Qual das seguintes funções não tem zeros?

(A) $g(x)=f(x+3)$

(B) $h(x)=f(x+4)+3$

(C) $j(x)=f(x-3)+4$

(D) $m(x)=f(x-3)-3$

(A) trata-se de uma transformação horizontal associada ao vetor $\vec{h}(-3,0)$, portanto o contradomínio mantém-se inalterado.

(B) trata-se de uma transformação horizontal associada ao vetor $\vec{h}(-4,0)$ e de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,3)$, o contradomínio é $D'_h=[-3+3,3+3]=[0,6]$ e portanto a função tem um zero.

(C) trata-se de uma transformação horizontal associada ao vetor $\vec{h}(3,0)$ e de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,4)$, o contradomínio é $D'_h=[-3+4,3+4]=[1,7]$ como o contradomínio só tem valores positivos a função não passa por Ox e portanto a função não tem zeros.

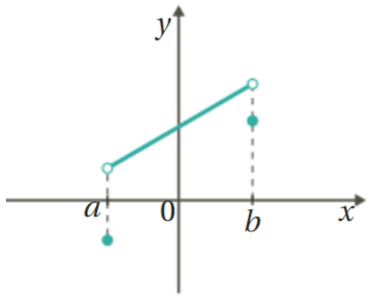
OPÇÃO: C

4. De uma função f, de domínio $[a, b]$ sabe-se que:

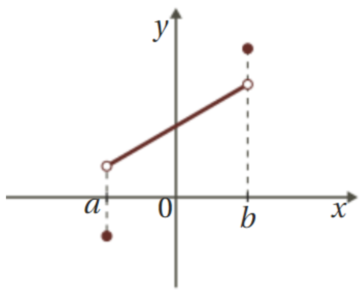
- $f(a)$ é mínimo absoluto;
- f não tem máximo absoluto;
- f é crescente em $[a, b[$

Em qual das figuras seguintes poderá estar representado, num referencial cartesiano, o gráfico da função f

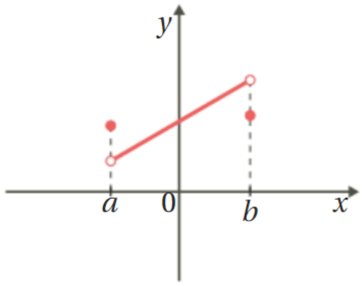
(A)



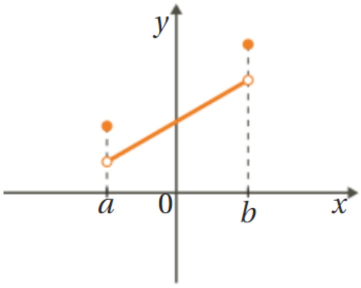
(B)



(C)

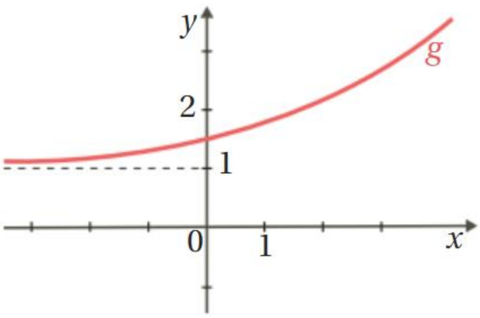


(D)



OPÇÃO: A

5. Na figura está representada, num referencial cartesiano, parte do gráfico de uma certa função g, crescente em IR e de contradomínio $]1, +\infty[$



Qual das seguintes funções tem como contradomínio o intervalo de números reais $]-\infty, 0[$ e é decrescente em IR ?

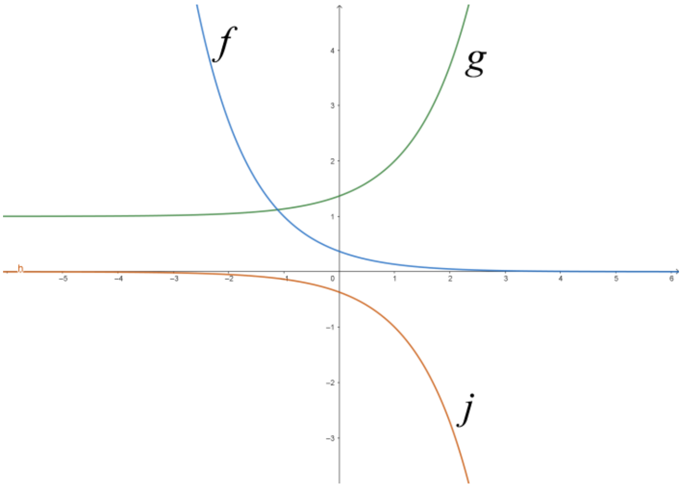
(A) $f(x) = g(-x) - 1$ **(B)** $j(x) = -g(x) + 1$

(C) $m(x) = -g(-x) + 1$ **(D)** $n(x) = -g(-x) - 1$

(A) o gráfico de f obtém-se a partir do gráfico de g através de uma reflexão do eixo Oy seguida pela translação associada ao vetor $\vec{v}(0,-1)$. $D'_f =]0, +\infty[$ e é decrescente.

(B) o gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de g através de uma reflexão do eixo Ox, seguida de uma translação associada ao vetor $\vec{v}(0,1)$. $D'_j =]-\infty, 0[$ e é decrescente.

As funções estão representadas na imagem em baixo.



OPÇÃO: B

6. O gráfico de uma função afim interseta o eixo Ox no ponto de abcissa 4 e o eixo Oy no ponto de ordenada 5.

6.1. Determine:

a) a forma canónica de f

Seja A o ponto de interseção da função com o eixo Ox, então $A(4,0)$ e seja B o ponto de interseção da função com o eixo $B(0,5)$

Declive:

$$a=\frac{5-0}{0-4} \Leftrightarrow a=-\frac{5}{4}$$

Ordenada na origem:

$B(0,5)$

Forma canónica da função afim:

$y=ax+b$

$$y=-\frac{5}{4}x+5$$

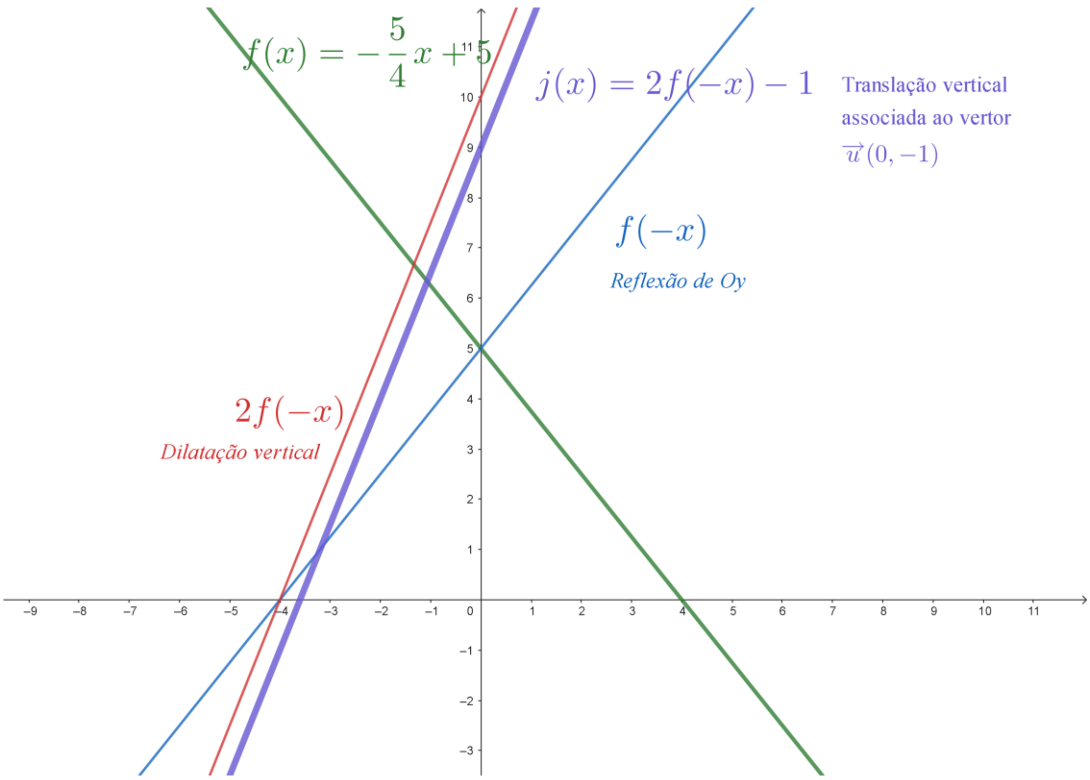
b) os zeros da função g definida por $g(x)=-f(x+2)$

$$g(x)=-f(x+2)=-\left(-\frac{5}{4}(x+2)+5\right)=-\left(-\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}+5\right)=-\left(-\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{4}x-\frac{5}{2}$$

$$g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x-\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{5}{4}x=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=2$$

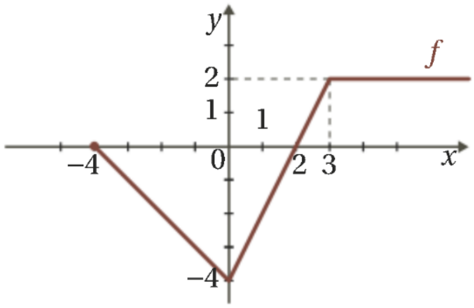
6.2. Esboce o gráfico da função j definida por $j(x)=2f(-x)-1$ a partir do gráfico de f.

Explique sucessivamente todas as transformações que tiver de efetuar.



7. Na figura está representada, num referencial o.n., parte do gráfico da função f de domínio $[-4,+\infty[$

Considere as funções g , h e j definidas por:



$g(x)=f(x+a), a\in IR$, $h(x)=f(-x)$ e $j(x)=-f(x)$

$D'_f=[-4,2]$

Zeros de f : $\{-4,2\}$

7.1. Indique os zeros da função h

$h(x)=f(-x)$ o gráfico de h obtém-se a partir do gráfico de f através de uma reflexão do eixo Oy.

Como os zeros de f são $\{-4,2\}$, então os zeros de $f(-x)$ são $\{-2,4\}$

7.2. Indique o contradomínio da função j

$j(x)=-f(x)$ o gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de f através de uma reflexão do eixo Ox.

Como $D'_f=[-4,2]$, então $D'_{-f}=-[-4,2]=[-2,4]$

7.3. Determine os valores reais de a de modo que a soma dos zeros da função g seja um número não negativo

$g(x)=f(x+a)$ o gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f através de uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(-a,0)$.

Os zeros de f são -4 e 2.

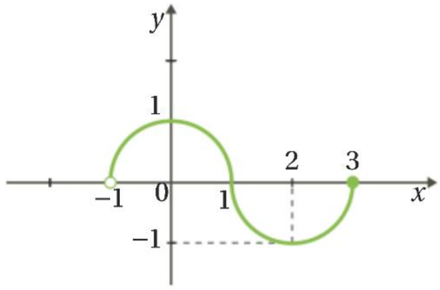
Para que a soma dos zeros de g seja um número não negativo:

$-4+(-a)+2+(-a)\geq 0 \Leftrightarrow -2a-2\geq 0 \Leftrightarrow -2a\geq 2 \Leftrightarrow a\leq -1$

Portanto $a\in]-\infty,-1]$

8. Na figura está representado, num referencial o.n., o gráfico da função g de domínio $]-1,3]$

Sabe-se que o contradomínio da função g é $[-1,1]$ e que 1 e 3 são os únicos zeros da função g



8.1. Considere a função j definida em $\left]-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ por $j(x)=4g(2x)$

a) Indique o contradomínio da função j

$j(x)=4g(2x)$ o gráfico de j obtém-se a partir do gráfico de g através de uma contração horizontal $g(2x)$ seguida de uma dilatação vertical $4g(2x)$ do eixo Ox.

Como $D'_f=[-1,1]$, então $D'_j=4[-1,1]=[-4,4]$

b) A função j tem zeros? Justifique.

Como existe uma contração horizontal de coeficiente $\frac{1}{2}$ e os zeros de g são 1 e 3, então os zeros de j são $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$

8.2. Considere a translação $T_{\vec{u}}$ sendo $\vec{u}(-1,1)$, e a transformação ϕ do plano que transforma o ponto $P(x,y)$ no ponto $Q\left(x,\frac{1}{4}y\right)$

Considere, também, a função f que tem como gráfico cartesiano a imagem de g pela composta $T_{\vec{u}}\circ\phi$.

$T_{\vec{u}}\circ\phi$ é uma translação associada ao vetor $\vec{u}(-1,1)$ após uma transformação ϕ

$D_g=]-1,3]$ e $D'_g=[-1,1]$

Φ transforma $P(x,y)$ em $Q\left(x,\frac{1}{4}y\right)$, ou seja, Φ é uma contração vertical de coeficiente $\frac{1}{4}$.

Assim, o domínio mantém inalterado e o contradomínio é $D'=\frac{1}{4}[-1,1]=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

De seguida temos a translação associada ao vetor $\vec{u}(-1,1)$, assim $D=]-1-1,3-1]=]-2,2]$ e

$D'=\left[-\frac{1}{4}+1,\frac{1}{4}+1\right]=\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right]$

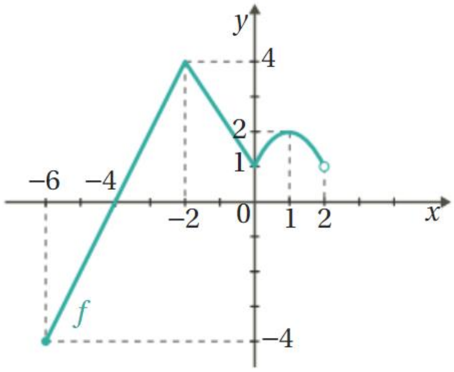
Indique:

a) o domínio da função f $D=]-2,2]$

b) o contradomínio da função f $D'=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$

c) a expressão analítica da função f $f(x)=\frac{1}{4}g(x+1)+1$

9. Na figura está representado, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função *f*



9.1. Indique o domínio e contradomínio da função *f*

$D_f = [-6,2[$ e $D'_f = [-4,4]$

9.2. Construa uma tabela de variação da função *f*

x	-6		-2		0		1		2
$f(x)$	-4	↗	4	↘	1	↗	2	↘	n.d.

9.3. Estude a função *f* quanto à monotonia e à existência de extremos relativos

Mínimos relativos: -4 e 1

Máximos relativos: 4 e 2

9.4. Indique um intervalo $[a,b] \subset D_f$ em que:

a) a função *f* seja positiva e decrescente

Existem duas hipóteses: $[-2,0]$ ou $[1,2[$

b) a função *f* seja positiva e crescente

Por exemplo: $[-3,-2]$ ou $[0,1]$

c) $\exists x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

Por exemplo: $[-3;1,9]$

9.5. Considere a função *g* definida por $g(x) = -f(-x) + 1$

$g(x)$ o gráfico de g obtém-se a partir do gráfico de f através de uma reflexão do eixo Oy, seguida de uma reflexão do eixo Ox e de uma tranlação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,1)$

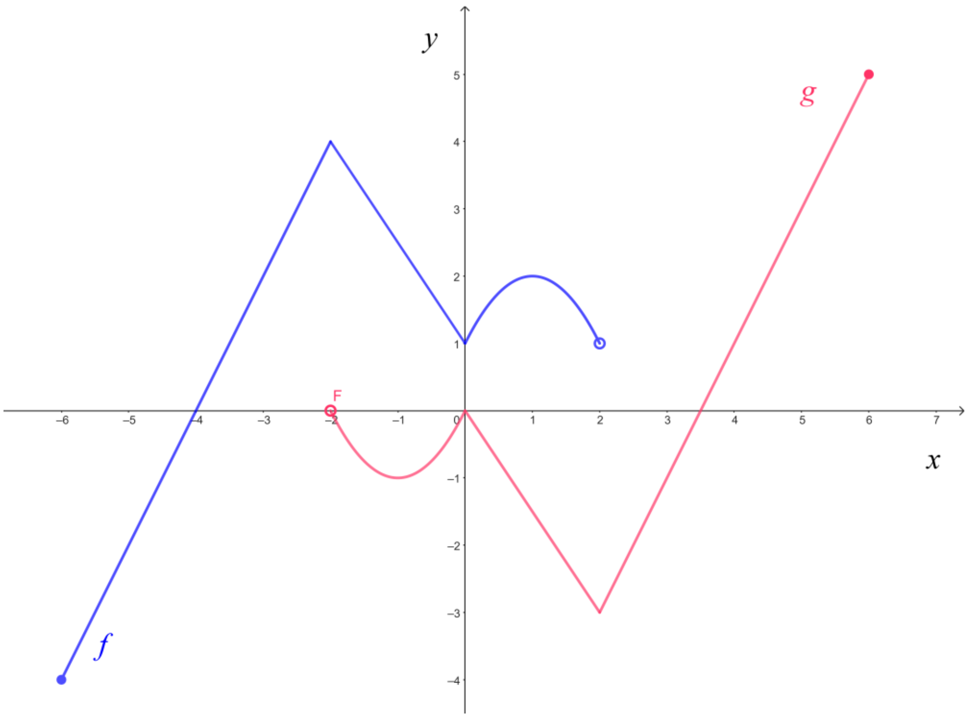
a) Indique o domínio e o contradomínio da função *g*

$D_g \underset{\substack{\text{Reflexão}\\\text{em torno}\\\text{de } Oy}}{=} -D_f = -[-6,2[=]-2,6]$

$D'_g = -D'_f + D'_{f+1} = -[-4+1,4+1] = [-5,5]$

b) Estude a função g quanto à monotonia e existência de extremos

Sugestão: Faça um esboço do gráfico da função g



Monotonia:

- f é crescente em: $x \in [-1, 0] \cup [2, 6]$
- f é decrescente em: $x \in]-2, -1] \cup [0, 2]$

Extremos:

- mínimos: -1 e -3 (absoluto)
- máximos: 0 e 5 (absoluto)

10. Considere a família de funções afim, definidas em IR, por $f(x) = (2 - a^2)x - 3$, onde $a \in IR$

10.1. Determine os valores reais de a para os quais:

a) a função f é crescente em IR

A função f é crescente se o seu declive é positivo.

$2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow -a^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow a \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$

CA
Trata-se de uma parábola com a concavidade virada para baixo.
Positiva entre os zeros.
Zeros: $-a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

b) o gráfico da função f é uma reta paralela ao eixo Ox

A função f é paralela ao eixo Ox se for uma função constante, isto é, se o seu declive é igual a zero.

$-a^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{2}$

c) a função *f* tenha zero para $x = 6$

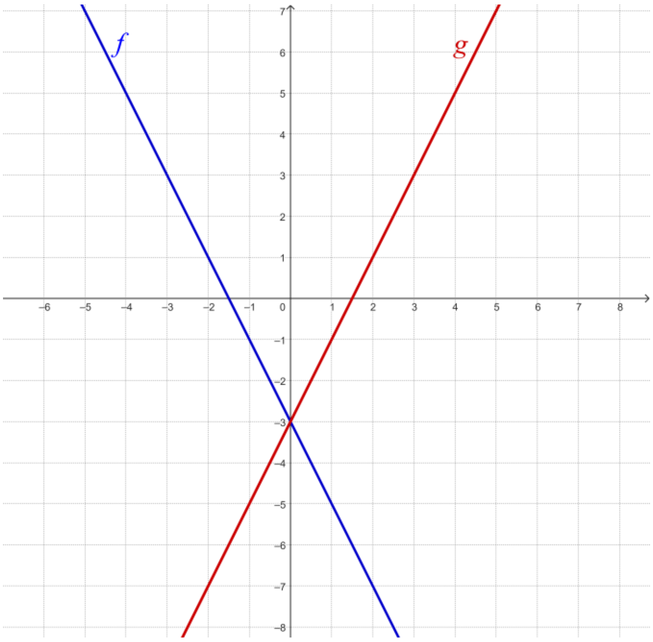
$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \left(2 - a^2\right) \times 6 - 3 = 0 \Leftrightarrow 12 - 6a^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow -6a^2 = -9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \frac{9}{6} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{9}{6}} \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

10.2. Admita que $a = 2$

$$f(x) = \left(2 - 2^2\right)x - 3 = -2x - 3$$

a) Esboce o gráfico da função *g* definida por $g(x) = f(-x)$



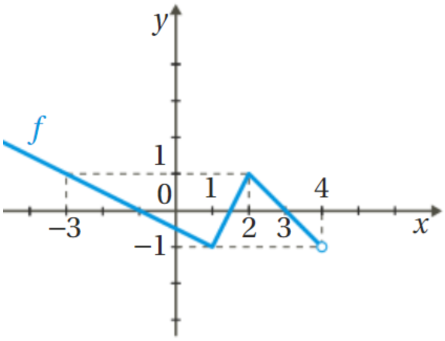
b) Indique o zero da função *h* definida por $h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right)$

$$h(x) = f\left(\frac{x}{3}\right) = -2\left(\frac{x}{3}\right) - 3 = -\frac{2}{3}x - 3$$

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2x - 9 = 0 \Leftrightarrow -2x = 9 \Leftrightarrow x = -\frac{9}{2}$$

11. Na figura está representado, em referencial o.n., o gráfico da função f

Sabe-se que, em $\left]-\infty, 1\right]$, o gráfico de f é uma semirreta



11.1. Indique o domínio e o contradomínio da função f

$D_f = \left]-\infty, 4\right[$ e $D'_f = \left[-1, +\infty\right[$

11.2. Construa uma tabela de variação da função f e indique os intervalos de monotonia

x	$-\infty$	1		2		4
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	n.d.

f é decrescente em: $\left]-\infty, 1\right] \cup \left[1, 4\right[$

f é crescente em: $\left[1, 2\right]$

11.3. Indique os extremos relativos da função f

$f(1) = -1$ é mínimo

$f(2) = 1$ é máximo

11.4. Resolva as condições:

a) $f(x) = -1$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 1$

b) $f(x) < 1$

$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in \left]-3, 4\right[\setminus \{2\}$

11.5. A função f tem três zeros. Indique dois deles e determine o outro.

Zeros: $x = -1$ e $x = 3$

Outro zero:

Sejam $A(1, -1)$ e $B(2, 1)$ pontos do gráfico.

Declive: $a = \dfrac{1-(-1)}{2-1} = 2$

$y_A = a \times x_A + b \Leftrightarrow -1 = 2 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -3$

$y = 2x - 3$

$2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Portanto os zeros são: $-1, \dfrac{3}{2}$ e 3

11.6. Considere as funções $g(x)=f(x-1)$ e $h(x)=f(x)+1$

Determine:

a) o domínio e os zeros de g;

$D_f=]-\infty,4[$

$D_g=]-\infty+1,4+1[=]-\infty,5[$

Zeros: $g(x)=f(x-1)$

$S=\left\{-1+1,\frac{3}{2}+1,3+1\right\}=\left\{0,\frac{5}{2},4\right\}$

b) o contradomínio e os zeros de h.

$h(x)=f(x)+1$

$D'_h=[-1+1,+\infty[=[0,+\infty[$

Zeros: $h(x)=0 \Leftrightarrow x=1$