



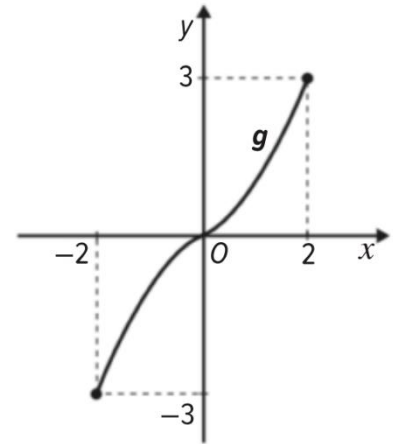
1. Na figura está representada uma função, g , de domínio $[-2, 2]$ e contradomínio $[-3, 3]$.

Sabe-se que:

- $a \in D_g \wedge b \in D_g$
- $a < b \wedge g(a) \times g(b) < 0$

Em qual das opções existem duas afirmações falsas?

- (A) $\frac{g(a)}{g(b)} > 0 \wedge g(-1) < g\left(-\frac{1}{2}\right)$
- (B) $g(a) + g(b) = g(a) \wedge g(-a) + g(b) > 0$
- (C) $g(b) - g(a) < 0 \wedge g(a+b) > 3$
- (D) $g(b) - g(a) = g(b) \wedge g(2+a) \geq 0$



Se $a < b \wedge g(a) \times g(b) < 0$, então, $a < 0$ e $b > 0$

Como $b > 0$, então, $g(b) > 0$

Como $a < 0$, então, $g(a) < 0$, isto é, $-g(a) > 0$

Assim, $g(b) - g(a) > 0$

Portanto:

- $g(b) - g(a) < 0$ Falso

Como $a \in [-2, 0[$ e $b \in]0, 2]$, então, $a+b \in [-2, 2]$ e $g(a+b) \in [-3, 3]$, logo, $g(a+b) \leq 3$

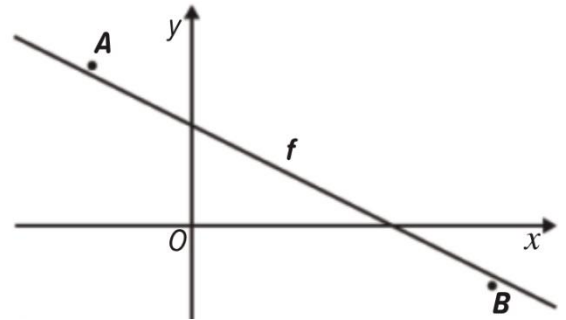
- $g(a+b) > 3$ Falso

OPÇÃO: C

2. Na figura estão representados os pontos A e B e o gráfico de uma função afim, f .

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $\left(-2, \frac{16}{5}\right)$;
- o ponto B tem coordenadas $\left(6, -\frac{6}{5}\right)$.



Qual das seguintes expressões algébricas pode representar f ?

- (A) $\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}x + 2$ (D) $-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

A opção (A) é excluída porque o declive de f é negativo.

Opção (B):

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \times (-2) + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{a ordenada de } A \text{ é menor do que } \frac{7}{2}$$

Opção (C):

$$f(-2) = -\frac{1}{2} \times (-2) + 2 = 3 \quad \text{a ordenada de } A \text{ é maior do que } 3$$

$$f(6) = -\frac{1}{2} \times 6 + 2 = -1 \quad \text{a ordenada de } B \text{ é menor do que } -1$$

OPÇÃO: C

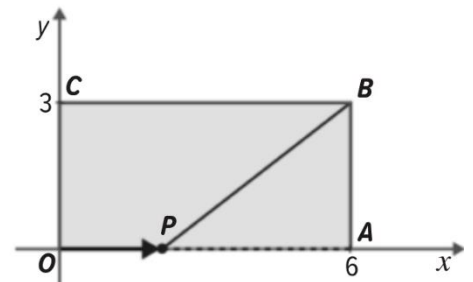
3. No referencial cartesiano está representado um retângulo, $[OABC]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm abscissa 6;
- os pontos B e C tem ordenada 3.

Um ponto P parte do ponto O e desloca-se, no sentido positivo, sobre o eixo Ox até ao ponto A .

Considere a função f que a x , abscissa de P , faz corresponder a distância de P a B , sendo esta representada por $f(x)$.



3.1. Calcule o número representado por $f(6) - f(2)$.

Temos que $f(6) = \overline{AB} = 3$

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, podemos calcular \overline{PB} quando a abscissa é 2.

$$\text{Assim, } \overline{PA} = 6 - 2 = 4 \text{ e } \overline{AB} = 3, \text{ logo, } \overline{PB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 16 + 9 \Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{25} \Leftrightarrow \overline{PB} = 5$$

$\overline{PB} > 0$

Então, $f(2) = 5$

$$\therefore f(6) - f(2) = 3 - 5 = -2$$

3.2. Qual dos conjuntos representa o contradomínio da função f ?

- (A) IR_0^+ (B) $[3, 3\sqrt{5}]$ (C) $[0, 6]$ (D) $[\sqrt{6}, 3\sqrt{5}]$

A maior distância de P a B é quando a abcissa da função é 0, isto é, $f(0)$.

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras:

$$\overline{PB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 \Leftrightarrow \overline{PB}^2 = 36 + 9 \Leftrightarrow \overline{PB} = \sqrt{45}$$

$\overline{PB} > 0$

A menor distância de P a B é quando a abcissa da função é 6, isto é, $f(6) = 3$

Portanto, $D'_f = [3, \sqrt{45}] = [3, \sqrt{9 \times 5}] = [3, 3\sqrt{5}]$

OPÇÃO: B

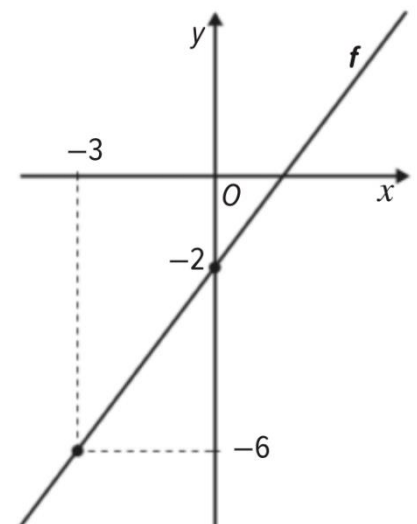
4. A reta representada no referencial cartesiano é uma representação de parte da função f .

Sabe-se que:

- a reta intersecta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0, -2)$;
- o ponto de coordenadas $(-3, -6)$ pertence ao gráfico de f .

O ponto A faz parte do gráfico da função f e tem ordenada 2.

Determine as coordenadas do ponto A .



Como $(0, -2)$ faz parte da função, então, $f(x) = ax - 2$

Assim, $-6 = -3a - 2 \Leftrightarrow 3a = 4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}$

Logo, $f(x) = \frac{4}{3}x - 2$

Como A pertence à função e tem ordenada 2, então, $\frac{4}{3}x - 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}x = 4 \Leftrightarrow x = 3$

$\therefore A(3, 2)$

5. Na figura estão representados graficamente as funções f e g :

5.1. Determine o domínio e o contradomínio da função f .

$$D_f = [-4, 4] \text{ e } D'_f = [-4, 3]$$

5.2. Indique o valor lógico das seguintes afirmações:

(I) A função f é decrescente no intervalo $[-1, 3]$. (V)

(II) 1 é um máximo relativo da função f . (F)

(III) f é positiva em $[-4, 0]$. (F)

(IV) 4 é um maximizante de f . (V)

(V) Existe um elemento x tal que $f(x) = -2$ (V)

5.3. Sejam $g(a) = 2$ e $g(3) = b$

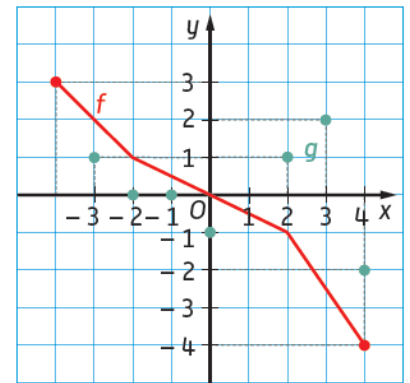
Calcule o valor de $(a-b)(a+b)$

$$\text{Temos que } g(a) = 2 \Leftrightarrow a = 3 \text{ e } g(3) = b \Leftrightarrow b = 2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

5.4. Determine o conjunto dos valores de x que satisfazem a condição $f(x) \times g(0) < 0$

$$\text{Como } g(0) = -1, \text{ então, } f(x) \times g(0) < 0 \Leftrightarrow -f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-4, 0[$$



6. Na figura está representado, num referencial cartesiano, o gráfico de uma função f , de domínio $[-2, 7]$.

6.1. Escreva o conjunto dos valores de k para os quais a equação $f(x) = k$, é impossível.

Apresente a sua resposta na forma e intervalo ou de união de intervalos.

$$]-\infty, 1[\cup]3, +\infty[$$

6.2. Qual das seguintes afirmações é falsa?

(A) -1 é um mínimo absoluto da função.

(B) -1 é um máximo relativo da função.

(C) A função f é crescente em sentido lato.

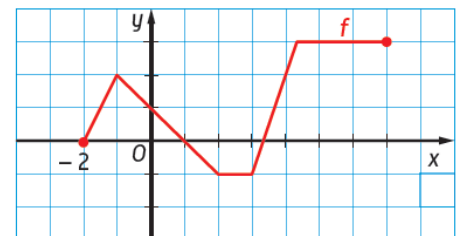
(D) A função f é decrescente em sentido lato em $[1, 3]$

OPÇÃO: C

6.3. Indique o conjunto-solução da condição $f(x) < 2$.

Apresente a resposta na forma de união de intervalos de números reais.

$$]-2, -1[\cup]-1, 4[$$



7. Sejam k e p números reais. Considere as funções afins f e g , de domínio \mathbb{R} , definidas por:

$$f(x) = (2k+1)x - 4p \text{ e } g(x) = -3x + 6$$

Sabe-se que as retas representam, num referencial cartesiano, as funções f e g :

- as paralelas;
- interseçam o eixo Ox no mesmo ponto.

Determine os valores de k e p .

Como as retas são paralelas, então, os declives de f e g são iguais:

$$2k+1 = -3 \Leftrightarrow k = -2$$

Interseção de g com o eixo Ox

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Assim, } f(2) = 0 \Leftrightarrow (2 \times (-2) + 1) \times 2 - 4p = 0 \Leftrightarrow -6 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore k = -2 \text{ e } p = -\frac{3}{2}$$

8. De uma função f de domínio $[-4, 5]$, sabe-se que:

- $f(-4) = 6$; $f(2) = -1$; $f(5) = 1$
- f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$;
- f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$.

Quantas soluções poderá ter, no máximo, a equação $f(x) = 0$?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

A função f é estritamente decrescente no intervalo $[-4, 2]$, $f(-4) = 6$ e $f(2) = -1$, logo, f tem no máximo um zero no intervalo $[-4, 2]$

f é estritamente crescente no intervalo $[2, 5]$, $f(2) = -1$ e $f(5) = 1$, logo, f tem no máximo um zero no intervalo $[2, 5]$.

Logo, $f(x) = 0$ tem no máximo duas soluções no intervalo $[-4, 5]$.

OPÇÃO: C

9. Admita que, relativamente a um dado produto, as funções f e g traduzem o preço, em euros, em função da quantidade procurada e da quantidade oferecida pelo mercado, respetivamente.

São conhecidos os valores na tabela seguinte.

Preço (€)	Quantidade procurada	Quantidade oferecida
10	700	150
50	100	650

Analisando a tabela, verificamos que, quando o preço do produto é 10, há uma grande procura, mas pouca oferta. No entanto, se o preço for 50, a procura é menor, mas a oferta é maior.

Sabe-se que os gráficos das funções f e g estão contidos nas retas r e s , respetivamente, e estão parcialmente representados na figura seguinte.

- 9.1. Escreva as equações reduzidas das retas r e s .

Reta r :

Pontos: $(700, 10)$ e $(100, 50)$

$$a = \frac{50 - 10}{100 - 700} = -\frac{1}{15}$$

$$(y - 50) = -\frac{1}{15}(x - 100) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}x + \frac{100}{15} + 50 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{15}x + \frac{170}{3}$$

$$f(x) = -\frac{1}{15}x + \frac{170}{3}$$

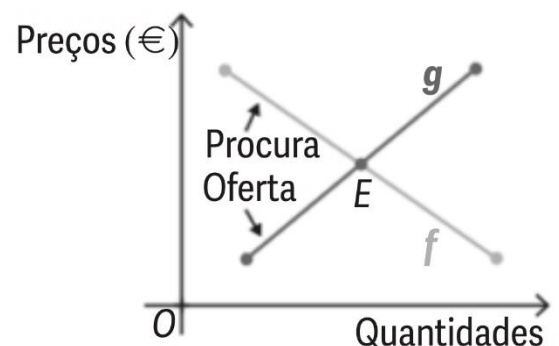
Reta s :

Pontos: $(150, 10)$ e $(650, 50)$

$$a = \frac{50 - 10}{650 - 150} = \frac{2}{25}$$

$$y - 10 = \frac{2}{25}(x - 150) \Leftrightarrow y = \frac{2}{25}x - \frac{300}{25} + 10 \Leftrightarrow y = \frac{2}{25}x - 2$$

$$g(x) = \frac{2}{25}x - 2$$



- 9.2. Designa-se por ponto de equilíbrio, o ponto E de interseção dos gráficos das funções f e g e corresponde ao ponto em que os interesses da procura coincidem com os da oferta.

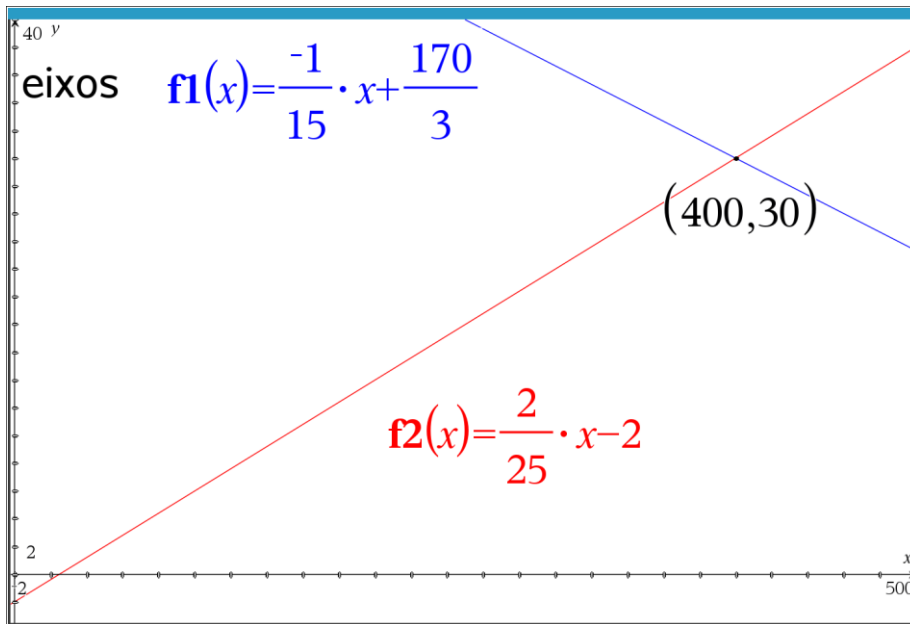
Determine, por processos analíticos, as coordenadas do ponto de equilíbrio E e, em seguida, confirme a sua resposta recorrendo às capacidades gráficas da calculadora.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow -\frac{1}{15}x + \frac{170}{3} = \frac{2}{25}x - 2 \Leftrightarrow -5x + 4250 = 6x - 150 \Leftrightarrow -11x = -4400 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 400$$

$$f(400) = -\frac{1}{15} \times 400 + \frac{170}{3} = 30$$

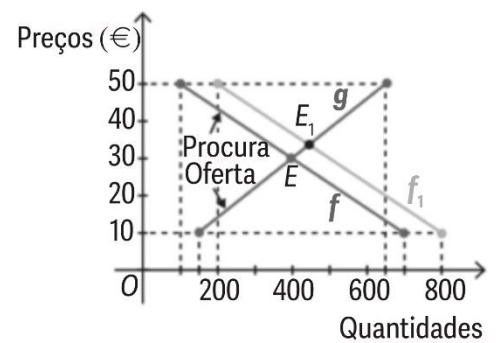
$$E(400, 30)$$



9.3. Se ocorresse um acontecimento perturbador deste equilíbrio, esta situação não se iria manter.

Imanemos, por exemplo, que a utilização do produto foi recomendada por um técnico muito conceituado. Em princípio essa recomendação iria provocar um aumento da procura.

Observando a nova situação através da representação gráfica ao lado, podemos verificar que a linha da procura se iria deslocar 100 unidades para a direita (f_1), gerando um



excesso de procura e alterando o ponto de equilíbrio (E_1), aumentando o preço do produto.

Escreva a expressão algébrica de f_1 , e determine o valor exato das coordenadas E_1

Pontos de f_1 com a deslocação de 100 unidades para a direita:

$$(700+100,10)=(800,10) \text{ e } (100+100,50)=(200,50)$$

$$y = -\frac{1}{15}x + b \Leftrightarrow 50 = -\frac{1}{15} \times 200 + b \Leftrightarrow b = \frac{190}{3}$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3}$$

$$g(x) = f_1(x) \Leftrightarrow \frac{2}{25}x - 2 = -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3} \Leftrightarrow 6x - 150 = -5x + 4750 \Leftrightarrow 11x = 4900 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4900}{11}$$

$$g\left(\frac{4900}{11}\right) = \frac{2}{25} \times \frac{4900}{11} - 2 = \frac{370}{11}$$

Portanto $E_1\left(\frac{4900}{11}, \frac{370}{11}\right)$

9.4. Num modelo económico teórico, considere que o domínio de f_1 é $[200,800]$ e o domínio de g é $[150,650]$.

Considere que o novo fator de desequilíbrio provoca uma alteração no gráfico da procura f_1 . Essa transformação é definida por $f_2(x) = f_1(x) + k$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Determine os valores de k para os quais deixe de existir ponto de equilíbrio entre a procura e a oferta.

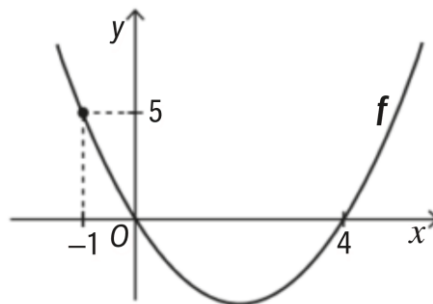
$$f_2(x) = f_1(x) + k = -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3} + k, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} f_2(x) = g(x) &\Leftrightarrow -\frac{1}{15}x + \frac{190}{3} + k = \frac{2}{25}x - 2 \Leftrightarrow -5x + 4750 + 75k = 6x - 150 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -11x = -4900 - 75k \Leftrightarrow x = \frac{4900}{11} + \frac{75}{11}k \end{aligned}$$

Como $k \in \mathbb{R}^+$, o gráfico f_2 obtém-se do gráfico f_1 deslocando-se k unidades na vertical para cima. Assim, para não existir ponto de equilíbrio entre a procura e a oferta x tem que ser superior a 650

$$x > 650 \Leftrightarrow \frac{4900}{11} + \frac{75}{11}k > 650 \Leftrightarrow 4900 + 75k > 7150 \Leftrightarrow 75k > 2250 \Leftrightarrow k > 30$$

10. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy , parte da parábola que é o gráfico da função f .



Sabe-se que:

- a parábola contém o ponto de coordenadas $(-1,5)$;
- os zeros de f são 0 e 4.

10.1. Mostre que a função f é definida por $f(x) = (x-2)^2 - 4$.

Como 0 e 4 são zeros da função, então, $x=0 \vee x=4 \Leftrightarrow x-0=0 \vee x-4=0$

Assim, $f(x) = a(x-0)(x-4) = ax(x-4)$

$$f(-1) = 5 \Leftrightarrow a(-1)(-1-4) = 5 \Leftrightarrow a = 1$$

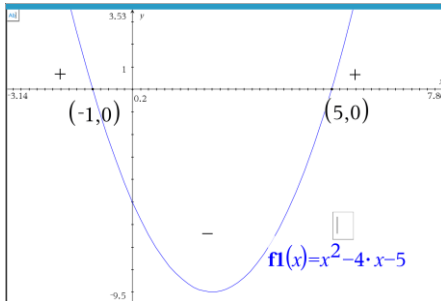
$$f(x) = x(x-4) = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 = (x-2)^2 - 4 \quad \text{c.q.m.}$$

10.2. Determine os valores de x que satisfazem a condição $f(x) \geq 5$.

Apresente o conjunto-solução na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

$$f(x) \geq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 \geq 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 9 \Leftrightarrow x-2 \geq 3 \vee x-2 \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 5 \vee x \leq -1$$

$$x \in]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$$



10.3. Considere a função g definida por $g(x) = 2 + f(x-1)$

A função g é uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(1, 0)$, seguida de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{u}(0, 2)$.

Determine:

a) o contradomínio de g ;

$$D'_f = [-4, +\infty[$$

$$\text{Assim, } D'_g = [-4+2, +\infty+2] = [-2, +\infty[$$

b) os zeros de g .

Zeros de f são 0 e 4

$$x = 0 \vee x = 4$$

$$\text{Zeros de } g: x-1=0 \vee x-1=4 \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$$

$$\text{C.S.} = \{1, 5\}$$

11. Sejam f e g as funções, de domínio \mathbb{R} , definidas por

$$f(x) = x^2 \text{ e } g(x) = f(x-3)$$

Quais são as coordenadas do vértice da parábola que representa, num referencial cartesiano, a função g ?

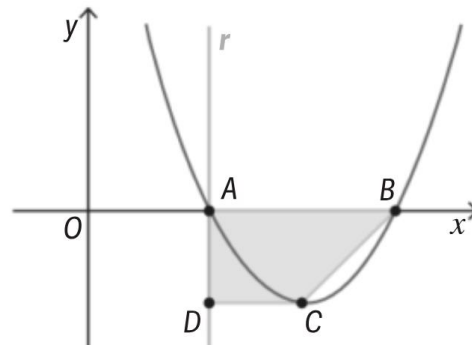
- (A) (0, -3) (B) (0, 3) (C) (-3, 0) (D) (3, 0)

As coordenadas do vértice da parábola de f são (0, 0)

A função g é uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(3, 0)$, logo, o vértice da função g tem coordenadas (3, 0)

OPÇÃO: D

12. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$.



Resolva os seguintes itens sem recorrer à calculadora.

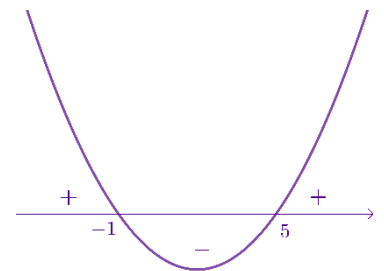
12.1. Determine o conjunto-solução da inequação $f(x) \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} f(x) \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right) &\Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 \geq -4\left(x - \frac{13}{2}\right) \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 \geq -4x + 26 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 \geq 0 \end{aligned}$$

C.A.

$$2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 2 \times (-10)}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8 \pm 12}{4} \Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$



$$x \in]-\infty, -1] \cup [5, +\infty[$$

12.2. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy :

- parte do gráfico da função f ;
- os pontos A e B que pertencem ao gráfico de f e ao eixo Ox ;
- a reta r que passa em A e é paralela ao eixo Ox ;
- o ponto C , vértice da parábola;
- o ponto D , ponto da reta r com ordenada igual à ordenada do ponto C ;
- o trapézio $[ABCD]$.

a) Prove que as coordenadas do ponto C são $(3, -2)$.

$$\begin{aligned} f(x) = 2x^2 - 12x + 16 &= 2(x^2 - 6x) + 16 = 2(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 16 = \\ &= 2(x - 3)^2 - 18 + 16 = 2(x - 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

Assim, $C(3, -2)$ c.q.m.

b) Determine a área do quadrilátero $[ABCD]$.

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \times \overline{AD} = \frac{|x_B - x_A| + |x_D - x_C|}{2} \times |y_A - y_D|$$

x_B e x_A são os zeros de $f(x)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{12 \pm 4}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$$

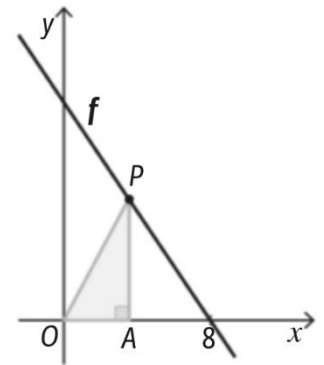
Logo, $A(2,0)$ e $B(4,0)$

$$\text{Assim, } \frac{|x_B - x_A| + |x_D - x_C|}{2} \times |y_A - y_D| = \frac{|4 - 2| + |2 - 3|}{2} \times |0 - (-2)| = \frac{3}{2} \times 2 = 3 \text{ u.a.}$$

13. Na figura está representada graficamente uma função afim, f , definida por $f(x) = 16 - 2x$.

Sabe-se que:

- P é um ponto que se desloca sobre a representação gráfica de f , no primeiro quadrante;
- A é o ponto do eixo Ox , tal que, para cada posição do ponto P , o triângulo $[OAP]$ é retângulo em A ;
- f intersesta o eixo Ox no ponto de abscissa 8.



Usando as capacidades gráficas da calculadora, determine a área máxima do triângulo $[OAP]$.

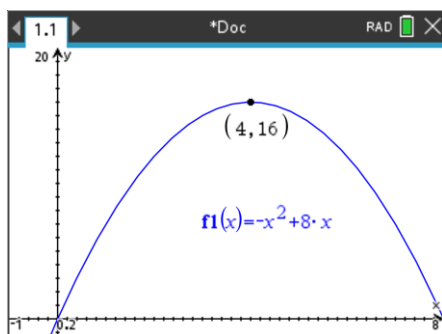
Justifique a sua resposta exibindo o esboço da representação gráfica obtida, a janela de visualização adequada utilizada e as coordenadas dos pontos mais relevantes.

Sugestão: designando por x a abscissa dos pontos A e P , mostre que a área do triângulo $[OAP]$ é dada por

$$a(x) = 8x - x^2, \text{ com } 0 < x < 8$$

$$\overline{OA} = x \text{ e } \overline{AP} = f(x) = 16 - 2x$$

$$A_{[OAP]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{2} = \frac{x(16 - 2x)}{2} = \frac{16x - 2x^2}{2} = -x^2 + 8x$$

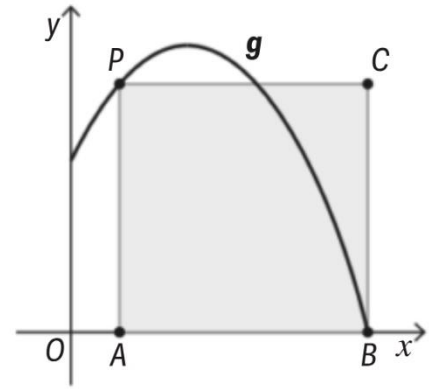


A área máxima é 16 u.a.

14. Na figura está representada graficamente parte de uma função g , definida por $g(x) = 20 + 8x - x^2$.

Sabe-se que:

- P é um ponto que se desloca sobre a representação gráfica de g , no primeiro quadrante;
- A é o ponto do eixo Ox , com a mesma abcissa de P ;
- B é a interseção do gráfico de g com o semieixo positivo Ox ;
- C é um vértice do retângulo $[ABCP]$.



Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora gráfica, determine o perímetro do retângulo $[ABCP]$ que tem maior área.

Justifique cuidadosamente a sua resposta.

Sugestão: Comece por mostrar que a área do retângulo $[ABCP]$ é dada por

$$a(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 200, \text{ com } 0 \leq x < 10$$

Temos que A e P têm a mesma abcissa, logo, $\overline{AP} = g(x) = -x^2 + 8x + 20$

$$\overline{AB} = |x_B - x_A|$$

$$x_A = x$$

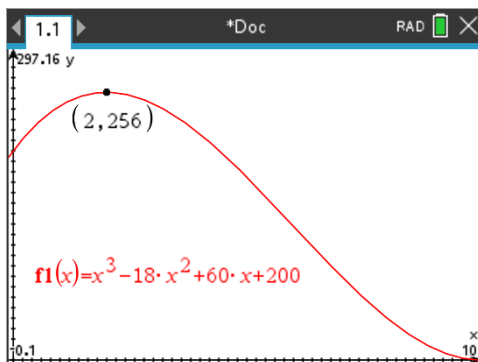
$$x_B : g(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 8x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times (-1) \times (20)}}{-2} \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 10$$

$$\overline{AB} = |10 - x|, \text{ com } 0 < x < 10$$

$$\overline{AB} = 10 - x$$

$$\begin{aligned} A_{[ABCP]} &= \overline{AB} \times \overline{AP} = (10 - x)(-x^2 + 8x + 20) = -10x^2 + 80x + 200 + x^3 - 8x^2 - 20x = \\ &= x^3 - 18x^2 + 60x + 200 \end{aligned}$$

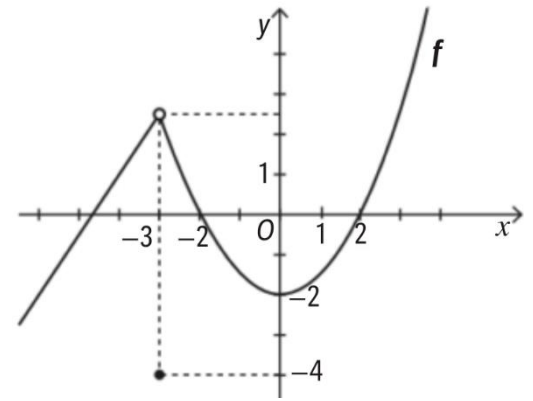
$$a(x) = x^3 - 18x^2 + 60x + 200, \text{ } x \in]0, 10[$$



A maior área é 256 u.a. quando $x = 2$

$$P_{[ABCP]} = 2(10 - x) + 2(-x^2 + 8x + 20) = 2(10 - 2) + 2(-2^2 + 16 + 20) = 16 + 64 = 80 \text{ u.c.}$$

15. Observe a figura onde se encontra representada, num referencial o.n. Oxy , parte do gráfico de uma função f de domínio \mathbb{R} .



Sabe-se que:

- para $x < -3$, o gráfico f é a semirreta que passa nos pontos de coordenadas $(-4, 1)$ e $(-6, -2)$;
- $f(-3) = -4$
- Para $x > -3$, o gráfico de f é parte da parábola que passa nos pontos de coordenadas $(-2, 0)$, $(0, -2)$ e $(2, 0)$

15.1. Mostre que a função f pode ser definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 7 & \text{se } x < -3 \\ -4 & \text{se } x = -3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{se } x > -3 \end{cases}$$

Para $x < -3$

$$a = \frac{1+2}{-4+6} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}x + b$$

$$-2 = \frac{3}{2} \times (-6) + b \Leftrightarrow b = 7$$

$$y = \frac{3}{2}x + 7$$

Para $x > -3$

$y = a(x-h)^2 + k$, como -2 e 2 são zeros da parábola, então, $V(0, -2)$

$$y = ax^2 - 2$$

$$0 = a2^2 - 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 7 & \text{se } x < -3 \\ -4 & \text{se } x = -3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2 & \text{se } x > -3 \end{cases} \quad \text{c.q.m.}$$

15.2. Determine os zeros da função g definida por $g(x) = f(x-1)$

$$g(x) = f(x-1) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x-1)+7 & \text{se } x-1 < -3 \\ -4 & \text{se } x-1 = -3 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 & \text{se } x-1 > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} + 7 & \text{se } x < -2 \\ -4 & \text{se } x = -2 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 & \text{se } x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} & \text{se } x < -2 \\ -4 & \text{se } x = -2 \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} = 0 \quad x < -2 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{3} \wedge x < -2$$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 - 2 = 0 \wedge x > -2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \wedge x > -2 \Leftrightarrow x-1 = \pm 2 \wedge x > -2 \Leftrightarrow (x=1 \vee x=3) \wedge x > -2$$

$$\text{C.S.} = \left\{ -\frac{11}{3}, 1, 3 \right\}$$

15.3. Indique o(s) intervalo(s) de maior amplitude em que simultaneamente, $f(x) < 0$ e f é decrescente.

$$]-2, 0[$$

16. Considere a função g , de domínio $[-5, 5]$, definida por $g(x) = -|x-1| + 3$.

16.1. Exprima g sem usar o símbolo módulo.

$$g(x) = -|x-1| + 3 = \begin{cases} -(x-1) + 3 & \text{se } x-1 \geq 0 \wedge -5 \leq x \leq 5 \\ -(-x+1) + 3 & \text{se } x-1 < 0 \wedge -5 \leq x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} -x+4 & \text{se } x \geq 1 \wedge -5 \leq x \leq 5 \\ x+2 & \text{se } x < 1 \wedge -5 \leq x \leq 5 \end{cases} = \begin{cases} -x+4 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ x+2 & \text{se } -5 \leq x < 1 \end{cases}$$

16.2. Indique:

a) o contradomínio de g ;

$$|x-1| \geq 0 \Leftrightarrow -|x-1| \leq 0 \Leftrightarrow -|x-1| + 3 \leq 3$$

$$g(x) \leq 3$$

$$g(-5) = -5 + 2 = -3$$

$$g(5) = -5 + 4 = 1$$

$$g(1) = -1 + 4 = 3$$

$$D'_g = [-3, 3]$$

b) os zeros de g ;

$$-|x-1| + 3 = 0 \Leftrightarrow -|x-1| = -3 \Leftrightarrow |x-1| = 3 \Leftrightarrow x-1 = 3 \vee x-1 = -3 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = -2$$

$$\text{C.S.} = \{-2, 4\}$$

c) os intervalos de monotonia de g .

$$g(x) = \begin{cases} -x+4 & \text{se } 1 \leq x \leq 5 \\ x+2 & \text{se } -5 \leq x < 1 \end{cases}$$

g é decrescente em $[1, 5]$

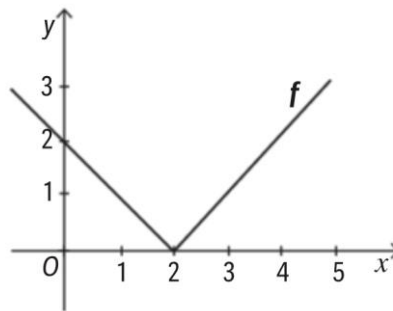
g é crescente em $[-5, 1]$

16.3. Utilizando processos exclusivamente analíticos, resolva a inequação $g(x) < 0$.

$$g(x) < 0 \Leftrightarrow -|x-1|+3 < 0 \Leftrightarrow -|x-1| < -3 \Leftrightarrow |x-1| > 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \vee x-1 < -3 \Leftrightarrow x > 4 \vee x < -2$$

$$x \in (]-\infty, -2[\cup]4, +\infty[) \cap [-5, 5] = [-5, -2[\cup]4, 5]$$

16.4. Considere a função f definida, em \mathbb{R} , por $f(x) = a|x-b|+c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$, cujo gráfico cartesiano está parcialmente representado no referencial Oxy da figura que se segue.

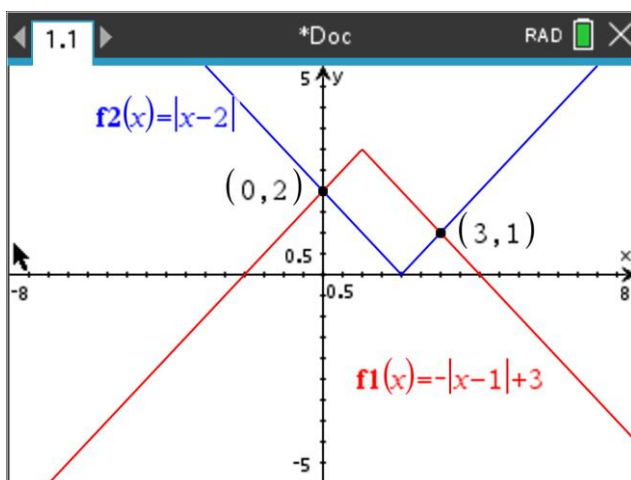


Resolva, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, a equação $f(x) = g(x)$

$f(x) = a|x-2|$, porque $x=2$, é zero e $c=0$, porque o zero de f é o vértice da função.

Como $(0, 2)$ pertence à função, então, $f(0) = 2 \Leftrightarrow a|0-2| = 2 \Leftrightarrow 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$

Assim, $f(x) = |x-2|$



$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

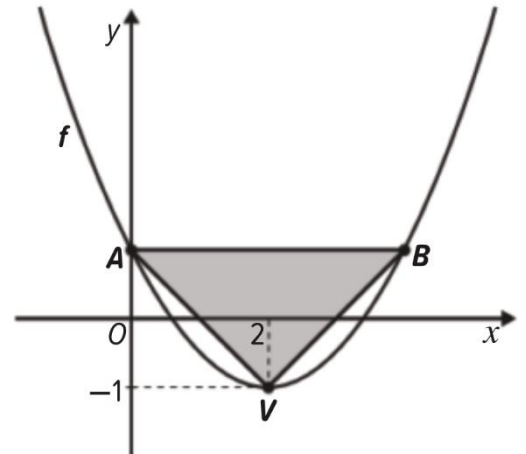
$$C.S. = \{0, 3\}$$

17. Seja f uma função quadrática definida por uma expressão do tipo $f(x) = a(x-h)^2 + k$, sendo, a, h e $k \in \mathbb{R}$.

Na figura, estão representados a parábola que representa a função f e o triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o vértice da parábola, V , tem coordenadas $(2, -1)$;
- a parábola interseca o eixo Oy no ponto A ;
- o ponto B pertence à parábola e tem ordenada igual à de A ;
- a medida da área do triângulo $[AVB]$ é 4.



17.1. Identifique o eixo de simetria da parábola e determine as coordenadas dos pontos A e B .

Eixo de simetria é a abcissa do vértice da parábola, isto é, $x = 2$

As coordenadas do ponto A são do tipo $(0, y_A)$ e do ponto B são do tipo $(4, y_B)$

$$A_{[AVB]} = \frac{\overline{AB} \times (y_A - (-1))}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{4(y_A + 1)}{2} \Leftrightarrow y_A + 1 = 2 \Leftrightarrow y_A = 1$$

$$\therefore A(0,1) \text{ e } B(4,1)$$

17.2. Na expressão $f(x) = a(x-h)^2 + k$, indique os valores de h e k e determine o valor de a .

$$V(2, -1)$$

$$f(x) = a(x-2)^2 - 1$$

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow a(0-2)^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore h = 2, k = -1 \text{ e } a = \frac{1}{2}$$

17.3. O ponto P pertence ao gráfico de f , tem abcissa positiva e ordenada 7. Determine as coordenadas de P

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1 = 7 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 16 \Leftrightarrow x-1 = \pm\sqrt{16} \Leftrightarrow x-1 = -4 \vee x-1 = 4 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

$x_p > 0$

$$\therefore P(5,7)$$



18. Considere a função quadrática, f , definida por $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

Estude a função f quanto:

- aos zeros;
- ao sinal;
- à monotonia e aos extremos.

Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times (-2) \times 2}}{-4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

Sinal:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+	0	-

Monotonia e extremos:

Vértice da parábola:

$$-2x^2 + 3x + 2 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 2 = -2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + 2 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} + 2 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$$

Assim, $V\left(\frac{3}{4}, \frac{25}{8}\right)$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	$\frac{25}{8}$	\searrow

Máximo da função: $\frac{25}{8}$

A função é crescente em $\left] -\infty, \frac{3}{4} \right]$

A função é decrescente em $\left[\frac{3}{4}, +\infty \right[$

19. Seja a um número real não nulo. Considere a função quadrática f , de domínio \mathbb{R} , definida por

$$f(x) = a(x-1)(x+3)$$

19.1. Considere as proposições seguintes

- I. O contradomínio da função f pode ser $[0, +\infty[$
- II. O vértice da parábola que representa a função tem coordenadas $(1, 3)$

Justifique que as proposições I. e II. São falsas.

Na resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

I. é falsa porque f é uma função quadrática com dois zeros, logo, se $a > 0$ a ordenada do vértice é negativo.

II. é falsa porque sendo 1 e -3 os zeros da função quadrática então $V(x_v, y_v)$, com, $x_v = \frac{-3+1}{2} = -1$

19.2. Considere a função afim g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 2x + 7$. Determine para que valor de a os gráficos das funções f e g têm um único ponto em comum.

Apresente todos os cálculos necessários.

Queremos determinar os valores de a para os quais $f(x) = g(x)$ tem uma única solução.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow a(x-1)(x+3) = 2x+7 \Leftrightarrow a(x^2+3x-x-3) - 2x-7 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ax^2 + 2ax - 3a - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + (2a-2)x - (3a+7) = 0 \end{aligned}$$

A equação só tem uma solução se o binómio discriminante for igual a 0.

$$(2a-2)^2 - 4a \times (-3a-7) = 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a + 4 + 12a^2 + 28a = 0 \Leftrightarrow 16a^2 + 20a + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{8} \Leftrightarrow a = -1 \vee a = -\frac{1}{4}$$

20. Considere uma função quadrática f representada graficamente num referencial cartesiano, por uma parábola de vértice de coordenadas $(5, 1)$. Sabe-se que a função tem dois zeros distintos.

Qual das expressões pode definir a função f ?

- I. $(x-4)(x-6)$
- II. $-(x-4,2)(x-6,2)$
- III. $(x-3)(7-x)$

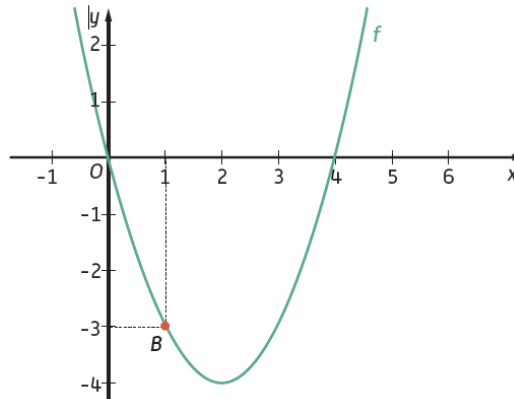
Opção I. falsa porque trata-se de uma função com a concavidade voltada para cima e como o vértice é $(5, 1)$ a função não podia ter zeros.

Opção II. É falsa porque os zeros da função quadrática são 4,2 e 6,2 logo a abcissa do vértice da parábola é

$$\frac{4,2+6,2}{2} = \frac{10,4}{2} = 5,2 \neq 5$$

Opção III. é verdadeira, $(x-3)(7-x) = -(x-3)(x-7)$

21. Na figura, está representada, num referencial o.n. Oxy , parte da parábola que representa a função quadrática f .



Sabe-se que:

- 0 e 4 são zeros da função;
- o ponto $B(1, -3)$ pertence ao gráfico de f .

Seja m um número real. Considere a função afim g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = mx - 9$ e a reta r que a representa graficamente no referencial da figura.

Determine para que valor de m a reta r é tangente à parábola da figura.

A função pode ser representada pela expressão algébrica $f(x) = a(x-h)^2 + k$

Seja V o vértice da parábola, então, $x_v = \frac{0+4}{2} = 2$

Vamos determinar os valores de a e k :

$$f(x) = a(x-2)^2 + k$$

$$\{ f(0) \}$$

$$f(0) = 0 \wedge f(1) = -3 \Leftrightarrow 4a + k = 0 \wedge a + k = -3 \Leftrightarrow k = -4a \wedge a - 4a = -3 \Leftrightarrow k = -4a \wedge a = 1 \Leftrightarrow k = -4 \wedge a = 1$$

Logo, $f(x) = (x-2)^2 - 4$

Ponto de interseção da reta r com a parábola:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 = mx - 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 4 - mx + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+4)x + 9 = 0$$

A reta r intersesta a parábola num só ponto se o binómio discriminante for igual a zero, isto é,

$$\begin{aligned} [-(m+4)]^2 - 4 \times 9 = 0 &\Leftrightarrow (m+4)^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 16 - 36 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow m^2 + 8m - 20 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \times (-36)}}{2} \Leftrightarrow m = -10 \vee m = 2 \end{aligned}$$

22. Seja a um número real não nulo.

Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por, $f(x) = a(x+4)(x+10)$.

Sabe-se que 6 é máximo absoluto da função f .

Qual é o valor de a ?

Mostre todos os cálculos necessários.

Como 6 é máximo absoluto da função, então f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo e $a < 0$

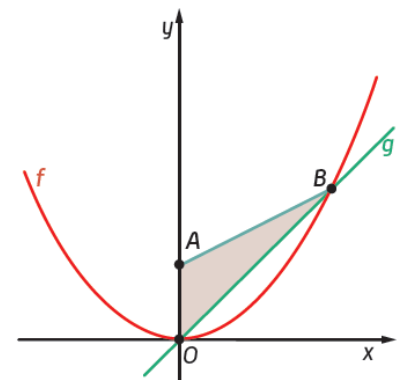
Seja V o vértice da parábola, então, $V(x_v, 6)$, assim, $x_v = \frac{-4-10}{2} = -7$.

$$a(x_v + 4)(x_v + 10) = 6 \Leftrightarrow a(-7 + 4)(-7 + 10) = 6 \Leftrightarrow -9a = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

23. Na figura, estão representadas, num referencial o.n. Oxy , as funções, de domínio \mathbb{R} , f e g .

Sabe-se que:

- $f(x) = \frac{1}{4}x^2$;
- g é uma função linear;
- o ponto A tem coordenadas $(0, 2)$
- o ponto B pertence ao gráfico de f e g ;
- a área do triângulo $[OAB]$ é 6.



23.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(6, 9)$.

Como a área de $[OAB]$ é 6, então, $A_{[OAB]} = 6 \Leftrightarrow \frac{\overline{OA} \times x_B}{2} = 6 \Leftrightarrow \frac{2 \times x_B}{2} = 6 \Leftrightarrow x_B = 6$

$$y_B = f(6) = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$$

$$\therefore B(6, 9) \text{ c.q.m.}$$

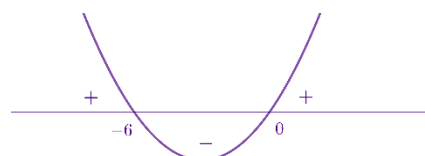
23.2. Determine, em \mathbb{R} , o conjunto-solução da condição: $-f(x) \geq g(x)$

$$g(x) = ax, \text{ então, } a = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \text{ logo, } g(x) = \frac{3}{2}x$$

$$-f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow -f(x) - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x \leq 0$$

C.A.

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x(x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -6$$



$$x \in [-6, 0]$$

24. Considere a função g definida, em \mathbb{R} , por $g(x) = 3|x-2| - 6$

24.1. Qual das expressões pode definir a função g ?

- (A) $\begin{cases} 3x-12 & \text{se } x \geq 0 \\ -3x & \text{se } x < 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x-12 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x & \text{se } x < 2 \end{cases}$
- (C) $\begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 2 \\ -3x+12 & \text{se } x < 2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x & \text{se } x \geq 0 \\ -3x+12 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$3|x-2|-6 = \begin{cases} 3(x-2)-6 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ 3(-x+2)-6 & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-12 & \text{se } x \geq 2 \\ -3x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

OPÇÃO: B

24.2. Determine os zeros de g .

$$3|x-2|-6=0 \Leftrightarrow 3|x-2|=6 \Leftrightarrow |x-2|=2 \Leftrightarrow x-2=2 \vee x-2=-2 \Leftrightarrow x=4 \vee x=0$$

C.S. = $\{0, 4\}$

25. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = |x-2| + 2$

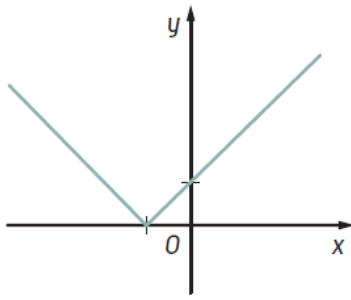
Qual das seguintes equações é impossível?

- (A) $g(x)=1$ (B) $g(x)=2$ (C) $g(x)=3$ (D) $g(x)=4$
- (A) $|x-2|+2=1 \Leftrightarrow |x-2|=-1$ impossível em \mathbb{R}
- (B) $|x-2|+2=2 \Leftrightarrow |x-2|=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ possível em \mathbb{R}
- (C) $|x-2|+2=3 \Leftrightarrow |x-2|=1 \Leftrightarrow x-2=1 \vee x-2=-1 \Leftrightarrow x=3 \vee x=1$ possível em \mathbb{R}
- (D) $|x-2|+2=4 \Leftrightarrow |x-2|=2 \Leftrightarrow x-2=2 \vee x-2=-2 \Leftrightarrow x=4 \vee x=0$ possível em \mathbb{R}

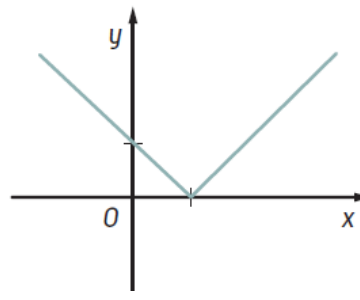
OPÇÃO: A

26. Qual das seguintes opções poderá representar a função real de variável real definida por $f(x) = |x - 2|$

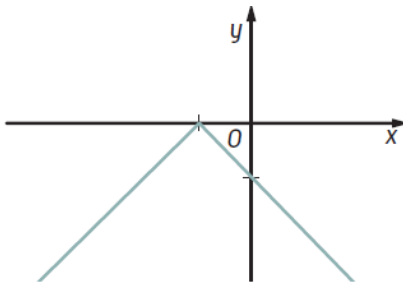
(A)



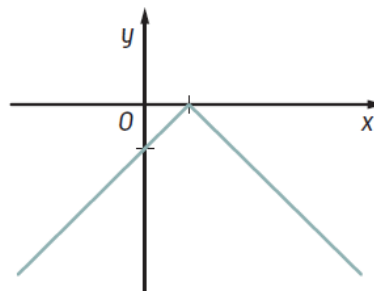
(B)



(C)



(D)



A função f é uma translação horizontal associada ao vetor $\vec{v}(2,0)$ da função $|x|$

OPÇÃO: B