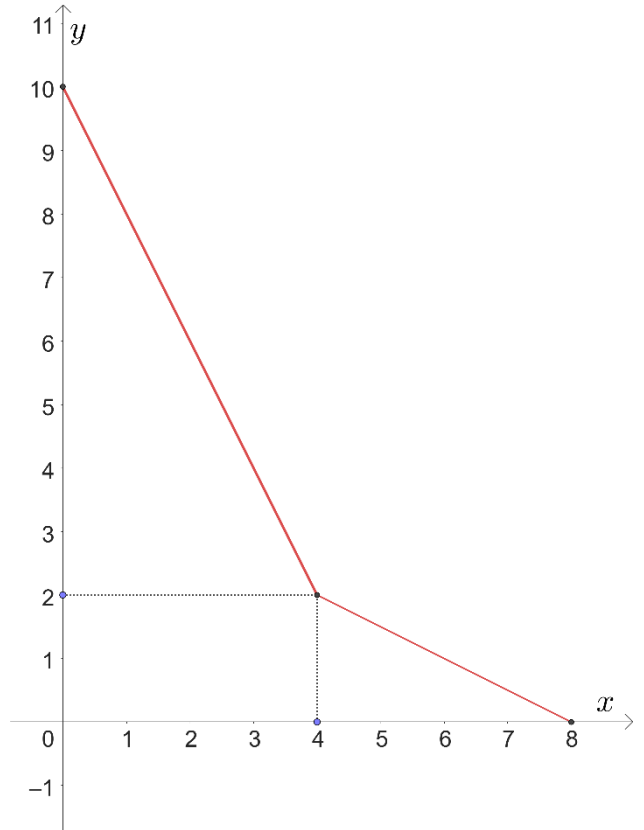




1. Na figura, está representada graficamente a função f , de domínio $[0, 8]$.

O gráfico é formado por dois segmentos de reta e, tal como a figura sugere, $f(4) = 2$.



- 1.1. Defina a função f através de uma expressão analítica.

$$A(0,10); B(4,2) \text{ e } C(8,0)$$

$$m_{AB} = \frac{2-10}{4-0} = -2$$

$$AB: y = -2x + 10$$

$$m_{BC} = \frac{0-2}{8-4} = -\frac{1}{2}$$

$$BC: y = -\frac{1}{2}x + b, \text{ então, } -\frac{1}{2} \times 8 + b = 0 \Leftrightarrow b = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 10 & \text{se } 0 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{2}x + 4 & \text{se } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

- 1.2. Calcule:

a) $f\left(\frac{3}{2}\right) \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \times \frac{3}{2} + 10 = 7$

b) $f(5) \quad f(5) = -\frac{1}{2} \times 5 + 4 = \frac{3}{2}$

- 1.3. Determine, sob a forma de intervalos de números reais, o conjunto-solução da condição:

a) $f(x) \leq 4$

$$f(x) = 4 \Leftrightarrow -2x + 10 = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

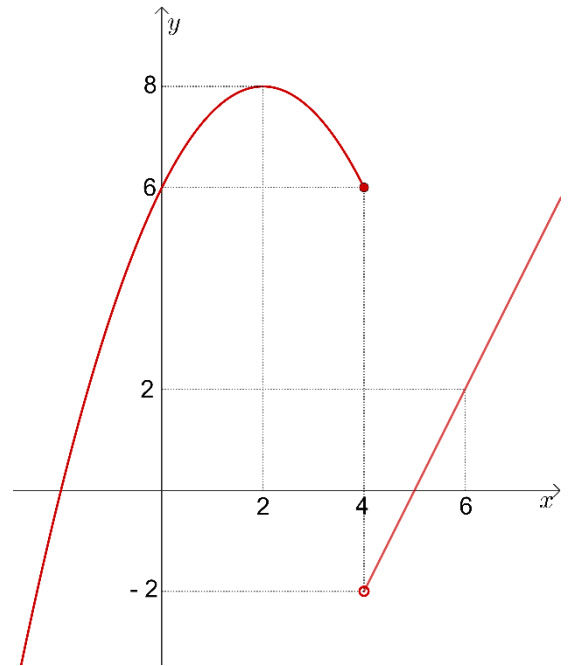
$$\text{Como } f \text{ é decrescente, } f(x) \leq 4 \Leftrightarrow x \geq 3 \Leftrightarrow x \in [3, 8]$$

b) $f(x+2) \geq 2$

$$f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0, 4]$$

$$f(x+2) \geq 2 \Leftrightarrow x \in [0-2, 4-2] \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$$

2. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} . Tal como a figura sugere, o gráfico é formado por uma semirreta e por parte de uma parábola cujo vértice é o ponto de coordenadas $(2,8)$.



Sabe-se ainda que $f(4)=6$ e $f(6)=2$

- 2.1. Defina a função através de uma expressão analítica.

Para , $x \leq 4$, $f(x) = a(x-h)^2 + k$, com $V(h,k)$ e $a < 0$

$$f(x) = a(x-2)^2 + 8$$

$$f(4) = 6 \Leftrightarrow a(4-2)^2 + 8 = 6 \Leftrightarrow 4a = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 \text{ para } x \leq 4$$

Para , $x > 4$, $f(x) = mx + b$

$$m = \frac{-2-2}{4-6} \Leftrightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + b$$

$$f(6) = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 \times 6 + b \Leftrightarrow b = -10$$

$$f(x) = 2x - 10, \text{ para } x > 4$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 & \text{se } x \leq 4 \\ 2x - 10 & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

- 2.2. Determine os zeros da função f .

Para $x \leq 4$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 16 \Leftrightarrow x-2 = -4 \vee x-2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 6 \Leftrightarrow x = 2$$

Para $x > 4$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\therefore \text{C.S.} = \{-2, 5\}$$

- 2.3. Indique os intervalos de monotonia e os extremos da função.

f é crescente em $]-\infty, 2] \cup]4, +\infty[$

f é decrescente em $[2, 4]$

8 é um máximo relativo em $x = 2$

f não tem extremos absolutos

3. Considere a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -3x + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

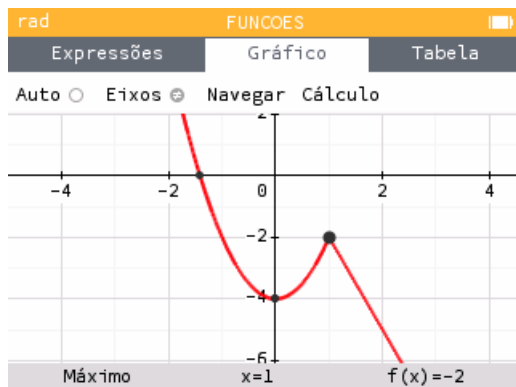
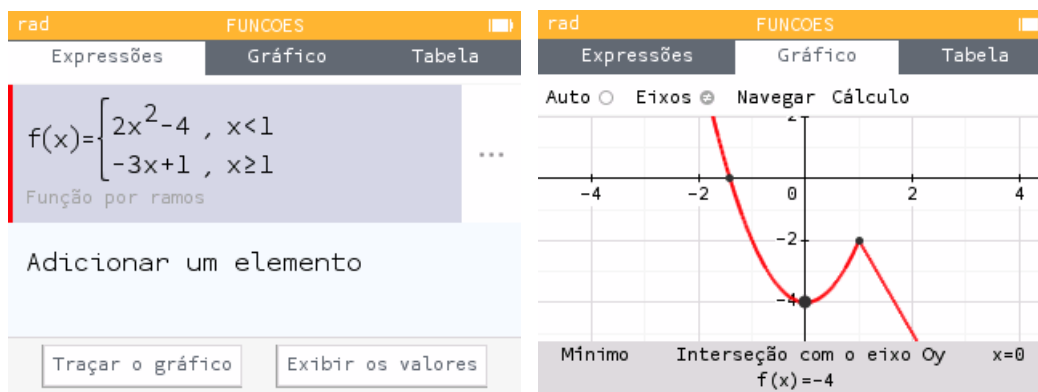
3.1. Determine o valor de $g(2) + g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g(2) + g\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \times 2 + 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 = -6 + 1 + 2 \times \frac{1}{4} - 4 = -\frac{17}{2}$$

3.2. Com recurso à calculadora gráfica, construa a tabela de monotonia.

Na sua resposta deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função visualizado na calculadora que lhe permite construir a tabela;
- assinalar no gráfico os pontos relevantes e apresentar as suas coordenadas.



x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$g(x)$	\searrow	-4	\nearrow	-2	\searrow

3.3. Seja $h(x) = g(x) + a$

Indique, justificando, os valores de a de modo que a função h tenha apenas dois zeros distintos.

Por observação do gráfico, g tem um único zero em $2x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$
 $x < 1$

Para que g tenha dois zeros distintos, o máximo relativo o mínimo relativo tem que ser igual a zero.

Máximo relativo igual a zero:

Máximo relativo:

$$g(1) = -2 \Rightarrow g(1) + 2 = 0$$

Logo, $a = 2$

Mínimo relativo igual a zero:

Mínimo relativo:

$$g(0) = -4 \Rightarrow g(0) + 4 = 0$$

Logo, $a = 4$

Portanto $a = 2 \vee a = 4$

4. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ 4 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Selecione a opção que apresenta o conjunto dos zeros da função f ?

(A) $\{-2, -1, 1, 2\}$ (B) $\{-2, 1\}$ (C) $\{-1, 2\}$ (D) $\{-1\}$

$$1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Leftrightarrow x = -1$$

$x \leq 0$

$$4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 2$$

$x > 0$

$$\text{C.S.} = \{-1, 2\}$$

OPÇÃO: C

5. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{3} & \text{se } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Selecione a opção que apresenta o valor de $f\left(\frac{5}{3}\right)$

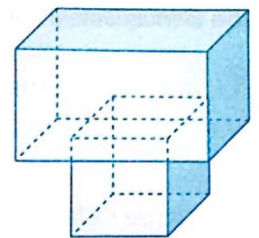
- (A) 2 (B) $\frac{11}{3}$ (C) $\frac{35}{6}$ (D) 5,3

$$\frac{5}{3} < 2$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = 2 \times \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$$

OPÇÃO: B

6. O depósito de água da casa do Nuno é composto por dois prismas quadrangulares regulares de diferentes tamanhos com uma abertura entre eles, como representa o esquema da figura.



Quando se enche o depósito com um fluxo de água constante, primeiro completa o depósito mais pequeno e, em seguida, o grande.

A altura da água no depósito, h , em metros, é dada em função do tempo, t , em minutos, pela função.

$$h(t) = \begin{cases} 0,05t & \text{se } 0 < t \leq 10 \\ 0,5 + 0,0125t & \text{se } 10 < t \leq 80 \end{cases}$$

6.1. Determine a altura de cada um dos depósitos.

Como os depósitos são diferentes e o primeiro a ficar cheio é o mais pequeno, significa que a altura do depósito mais pequeno é igual a 0,5 metros.

A altura do depósito maior é $h(80) - 0,5 = 0,5 + 0,0125 \times 80 - 0,5 = 1$ metro

altura do depósito pequeno

6.2. Determine a medida de comprimento do lado da base do depósito mais pequeno, sabendo que passados 2 minutos o volume de água era de 100 litros.

$$100 \text{ litros} \longrightarrow 0,1 \text{ m}^3$$

$$V = l^2 \times h(t) \Leftrightarrow 0,1 = l^2 \times h(2) \Leftrightarrow 0,1 = l^2 \times (0,05 \times 2) \Leftrightarrow l^2 = \frac{0,1}{0,1} \Leftrightarrow$$

Base é um quadrado

$$\Leftrightarrow l^2 = 1 \Leftrightarrow l = 1 \text{ metro}$$

$l > 0$

6.3. Determine o tempo que passou até a altura da água ser 1,25 m.

$$0,5 + 0,0125t = 1,25 \Leftrightarrow 0,0125t = 0,75 \Leftrightarrow t = \frac{0,75}{0,0125} \Leftrightarrow t = 60 \text{ minutos}$$

7. Nas últimas férias de verão, a Joana visitou Roma com os primos. Para circularem mais rapidamente pela cidade resolveram alugar algumas motorizadas.

O preço p , do aluguer de uma motorizada (em euros) é dado, em função do tempo de uso, t , em dias, pela expressão seguinte:

$$p(t) = \begin{cases} 35 + 20t & \text{se } 0 < t \leq 5 \\ 135 + 12t & \text{se } 5 < t \leq 30 \end{cases}$$

7.1. Calcule o preço a pagar por três motorizadas durante cinco dias.

$$3p(5) = 3(35 + 20 \times 5) = 3 \times 135 = 405$$

O preço a pagar é 405 €

7.2. Os primos alugaram quatro motorizadas para utilizarem durante os dias que estiveram em Roma e pagaram 1020 €.

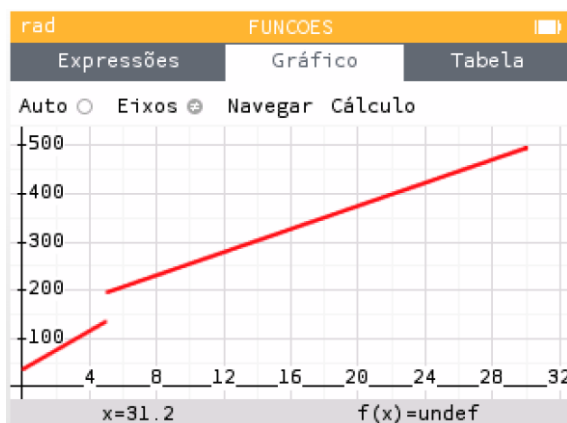
Determine o número de dias de férias.

$$4(135 + 12t) = 1020 \Leftrightarrow 540 + 48t = 1020 \Leftrightarrow 48t = 480 \Leftrightarrow t = \frac{480}{48} \Leftrightarrow t = 10$$

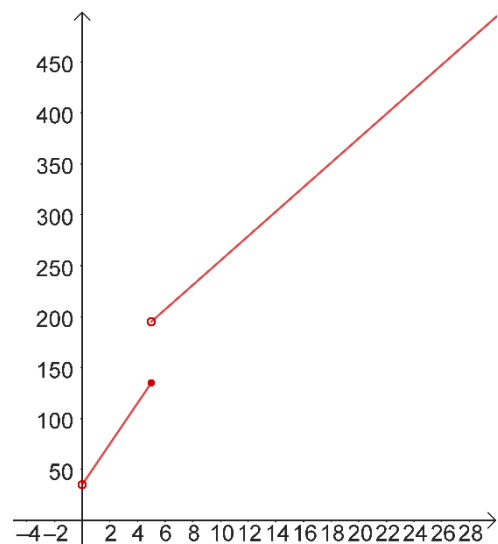
O número de dias de férias foram 10

7.3. Faça um esboço do gráfico da função p .

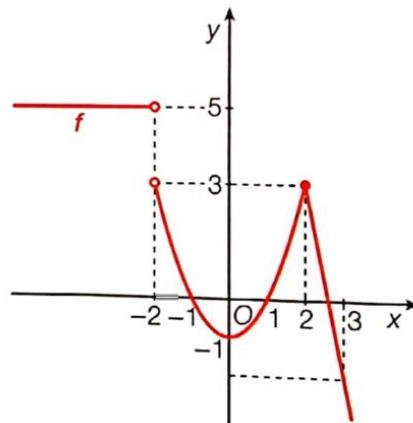
NumWorks



GeoGebra



8. No referencial o.n. Oxy , da figura está representada uma função real de variável real f .



Considere uma função g , obtida a partir de f , por transformações gráficas.

Sabe-se que $g(x) = f(x-1) + 2$

$g(x)$ é uma translação horizontal, associada ao vetor $\vec{u}(1,0)$, seguida de uma translação vertical associada ao vetor $\vec{v}(0,2)$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \text{ e } D'_f =]-\infty, 3] \cup \{5\}$$

- 8.1. Selecione a opção que apresenta o domínio da função g .

(A) $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ (B) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ (C) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (D) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2+1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

OPÇÃO: C

- 8.2. Selecione a opção que apresenta o contradomínio da função g .

(A) $]-\infty, 7]$ (B) $]-\infty, 5] \cup \{7\}$ (C) $]-\infty, 5] \setminus \{3\}$ (D) $]-\infty, 1] \cup \{3\}$

$$D'_g =]-\infty+2, 3+2] \cup \{5+2\} =]-\infty, 5] \cup \{7\}$$

OPÇÃO: B

9. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. Oxy , o gráfico de uma função f de domínio $]-2, 5]$.

Defina analiticamente a função f .

Declives:

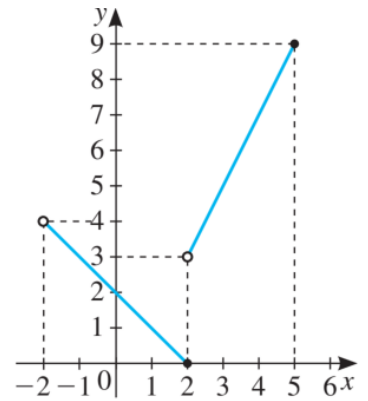
$$m_1 = \frac{4-0}{-2-2} = -1 \quad \text{e} \quad m_2 = \frac{9-3}{5-2} = 2$$

Ordenadas na origem:

$$y_1 = -x + b_1 \Rightarrow 4 = -(-2) + b_1 \Leftrightarrow b_1 = 2, \text{ assim, } y_1 = -x + 2$$

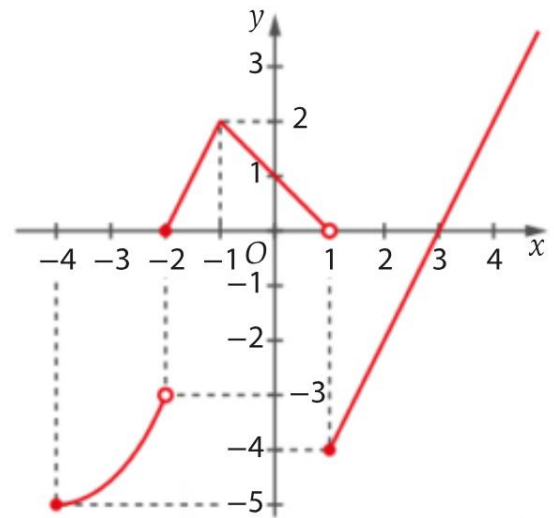
$$y_2 = 2x + b_2 \Rightarrow 3 = 2 \times 2 + b_2 \Leftrightarrow b_2 = -1, \text{ assim, } y_2 = 2x - 1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{se } -2 < x \leq 2 \\ 2x-1 & \text{se } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$



10. Na figura seguinte, está representado o gráfico de uma função g , de domínio $[-4, +\infty[$, constituído por:

- uma parte de uma parábola cujo correspondente mínimo absoluto é -5 ;
- dois segmentos de reta;
- uma semirreta.



Defina analiticamente a função g .

Parábola:

$$a(x-h)^2 + k, \quad V(h, k)$$

$$V(-4, -5) ; \quad a(x+4)^2 - 5$$

ponto $(-2, -3) \Rightarrow a(-2+4)^2 - 5 = -3 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

Assim a parte que corresponde à parábola é $y_1 = \frac{1}{2}(x+4) - 5$

1.º segmento de reta: $y_2 = a_2x + b_2$

$$a_2 = \frac{0-2}{-2+1} = 2 ; \quad b_2 = -2 \times (-2) + 0 = 4 ; \quad y_2 = 2x + 4$$

2.º segmento de reta: $y_3 = a_3x + b_3$

$$a_3 = \frac{2-0}{-1-1} = -1 ; \quad b_3 = 1 \times (1) - 0 = 1 ; \quad y_3 = -x + 1$$

Semirreta: $y_4 = a_4x + b_4$

$$a_4 = \frac{-4-0}{1-3} = 2 ; \quad b_4 = -2 \times (3) + 0 = -6 ; \quad y_4 = 2x - 6$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+4) - 5 & \text{se } -4 \leq x < 2 \\ 2x + 4 & \text{se } 2 \leq x < -1 \\ -x + 1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 6 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$