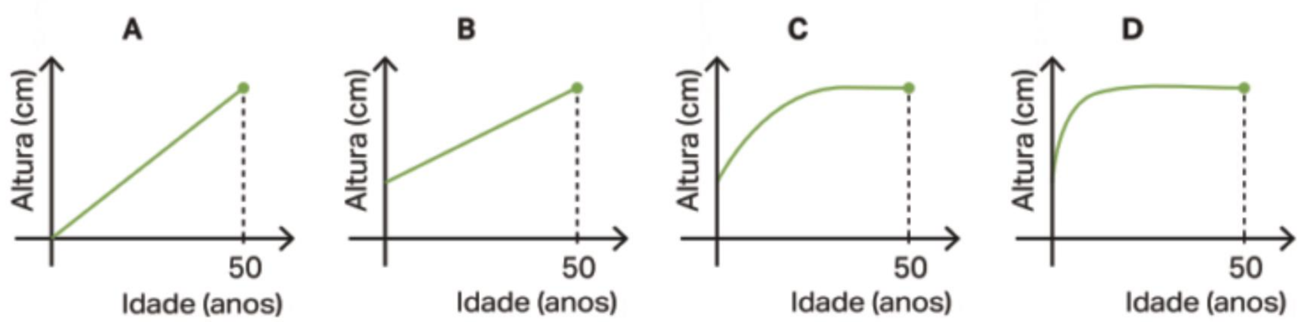
FUNÇÕES – GENERALIDADES 3 **FRVR**

1. Observe os seguintes os seguintes:

Apenas um deles pode apresentar a altura de uma pessoa, desde que nasce até atingir os 50 anos. Indica qual?



OPÇÃO: D

2. A conversão do valor da moeda euro para outras moedas tem uma oscilação diária e depende de vários fatores, tais como a inflação entre moedas, a instabilidade política, entre outros. No dia 26 de dezembro de 2023 a conversão entre o dólar americano (D) e o euro (E) era dada pela seguinte fórmula.

$$D = 1{,}1E$$

D	5,5	24,2	7,6	40,17	498,16
E	5	22	6,91	36,52	452,87

2.1. Copie e complete a tabela.

2.2. Considere, agora, a conversão da moeda dólar americano para a moeda euro.

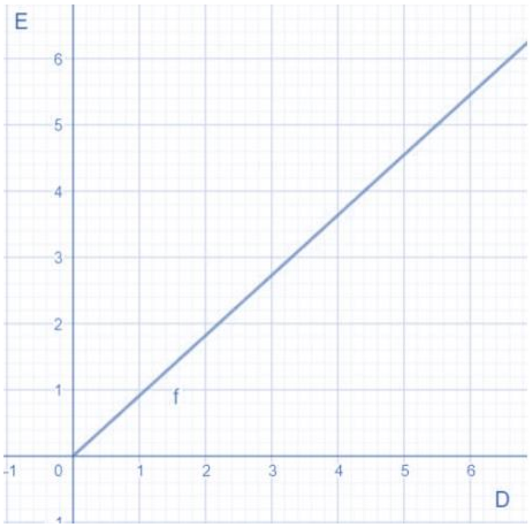
Seja f a função que a cada montante em dólares americanos (x) faz corresponder o seu valor em euros $(f(x))$.

2.2.1. Escreva a expressão analítica de $f(x)$ na forma $f(x) = ax$ (onde a é constante).

$$D = 1{,}1E \Leftrightarrow D = \frac{11}{10}E \Leftrightarrow E = \frac{10}{11}D$$

$$f(x) = \frac{10}{11}x$$

2.2.2. Representе f através de um gráfico cartesiano.



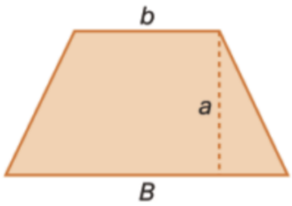
2.3. Durante o ano de 2023, o valor da moeda do euro variou entre 1,04 e 1,124 dólares.

Qual foi a percentagem de variação do euro face ao dólar americano, durante o ano de 2023?

$$\frac{1{,}124-1{,}047}{1{,}047}\times 100=\frac{0{,}077}{1{,}047}\times 100\approx 7{,}35\%$$

3. Considere os trapézios isósceles de área igual a 120 cm² cuja base maior (B) mede o dobro da menor (b).

3.1. Supondo que a base maior mede 20 cm , determine a altura do trapézio.



$$B=2b\Leftrightarrow b=\frac{b}{2}$$

$$A_{\text{Trapézio}}=120\Leftrightarrow\frac{B+b}{2}\times a=120\underset{\substack{B=20\\ b=10}}{\Leftrightarrow}\frac{20+10}{2}\times a=120\Leftrightarrow 15a=120\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{120}{15}\Leftrightarrow a=8$$

3.2. Seja x = medida da base maior e $f(x)$ = altura do trapézio, em função da base maior.

Escreva uma expressão analítica que represente f.

$$x=\text{ base maior }\Rightarrow\frac{x}{2}=\text{ base menor}$$

$$A_{\text{Trapézio}}=120\Leftrightarrow\frac{x+\frac{x}{2}}{2}\times a=120\Leftrightarrow\left(x+\frac{x}{2}\right)a=240\Leftrightarrow\frac{3x}{2}a=240\Leftrightarrow a=\frac{240\times 2}{3x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{480}{3x}\Leftrightarrow a=\frac{160}{x}\Leftrightarrow f(x)=\frac{160}{x}$$

3.3. Comente a afirmação: "Se a altura do trapézio for igual à base menor, então a medida da base maior é um número inteiro".

$a = b$

$$A_{\text{Trapézio}} = 120 \Leftrightarrow \frac{B+b}{2}\times a = 120 \underset{\substack{B=2b\\ a=b}}{\Leftrightarrow} \frac{2b+b}{2}\times b = 120 \Leftrightarrow \frac{3b}{2}\times b = 120 \Leftrightarrow 3b^2 = 240 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{240}{3} \Leftrightarrow b = \sqrt{80} \;,\; b > 0$$

$\therefore\ b = \sqrt{80}$ e $2b = B = 2\sqrt{80}$, como $2\sqrt{80}$ é um número racional a afirmação é falsa

4. Nos saldos de inverno, um pronto-a-vestir aplicou um desconto de 40% a todo o tipo de vestuário.
Seja f a função que ao preço inicial do vestuário faz corresponder o preço de saldo (desconto já aplicado).

4.1. Complete a tabela.

x (em €)	40	85	65,7	128
$f(x)$ (em €)	24	51	39,42	76,8

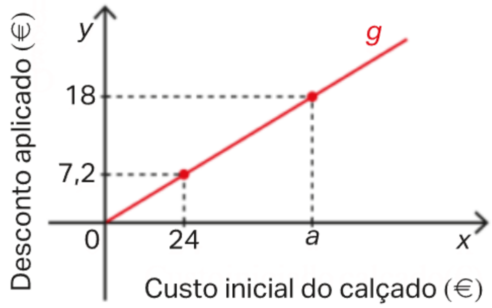
4.2. Escreva uma expressão analítica de f .

Como o desconto é 40%, então os clientes pagam 60% do preço final.

Assim, $60\% = 0{,}6$, portanto, $f(x) = 0{,}6x$

4.3. A mesma loja também aplicou desconto a todo o calçado, tal como se apresenta no gráfico.
Seja g a função que ao custo inicial do calçado, x , em euros, faz corresponder o seu desconto.
Determine a percentagem de desconto aplicado ao calçado.

$$\frac{7{,}2}{24}\times 100 = 0{,}3\times 100 = 30\%$$



4.4. Calcule o valor de a .

$$\frac{18}{a} = 0{,}3 \Leftrightarrow a = \frac{18}{0{,}3} \Leftrightarrow a = 60$$

4.5. Quais são as variáveis, independente e dependente de g ?

Variável independente: Custo inicial do calçado

Variável dependente: Desconto aplicado

4.6. Durante os saldos, a Francisca adquiriu, na referida loja, duas *sweatshirts* com o mesmo preço e um par de sapatilhas que custavam inicialmente 95 €. No total, pagou 111,5 € .

Qual era o preço sem desconto de cada *sweatshirt*?

Como as sapatilhas têm um desconto de 30% e tinham um preço inicial de 95 €, temos, $95\times 0{,}7=66{,}5$€ que é o preço final das sapatilhas despois do desconto.

Assim, $\underbrace{2\times 0{,}6x}_{\text{Custo das 2 } \textit{sweatshirt} \text{ após o desconto}}+66{,}5=111{,}5 \Leftrightarrow 1{,}2x=45 \Leftrightarrow x=\dfrac{45}{1{,}2} \Leftrightarrow x=37{,}5$

Logo, o preço de cada *sweatshirt* com desconto é de 37,5 €.

Sem desconto:

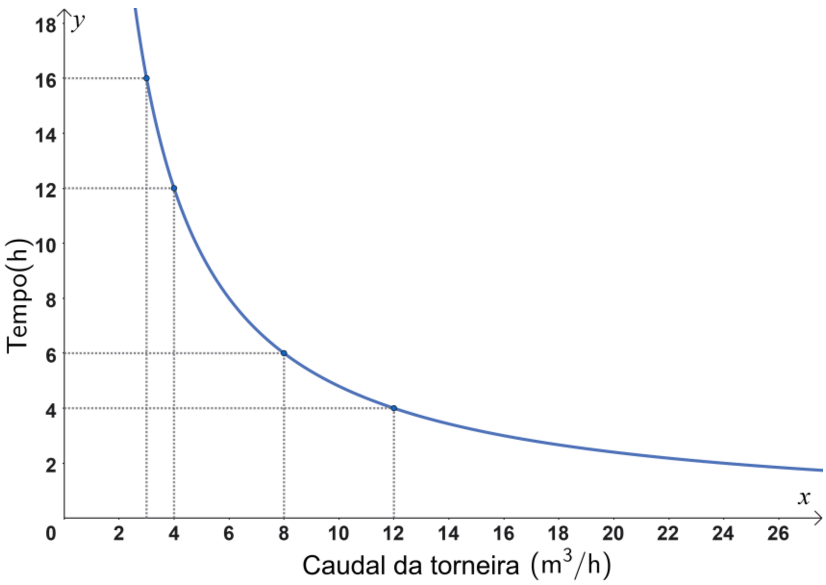
$37{,}5$ —— 60

x —— 100

$$x=\frac{37{,}5\times 100}{60}=62{,}5$$

Portanto cada *sweatshirt* custava 62,5 € antes de se aplicar o desconto.

5. O tempo, em horas, que demora a encher a piscina da casa do sr. Martins, em função do caudal da torneira, em m^3/h , está representado no gráfico seguinte.



5.1. Qual é a variável independente?

Caudal da torneira

5.2. Qual é a variável dependente?

Tempo

5.3. Determine a capacidade máxima, em litros, da piscina.

$6m^3/h\times 8h=48m^3=48000\, l$

5.4. Suponha que a torneira que encherá a piscina tem um caudal de $10\ \text{m}^3/\text{h}$. Nessas circunstâncias, quanto tempo é necessário para encher completamente a piscina?

Apresente o resultado em horas e minutos.

$$t \times 10 = 48 \Leftrightarrow t = \frac{48}{10} \Leftrightarrow t = 4{,}8$$

$$4{,}8h = 4h + 0{,}8h = 4h + 0{,}8 \times 60m = 4h + 48m$$

$4h\ 48m$

5.5. A base da referida piscina tem a forma quadrangular. A profundidade é de $1{,}6\ \text{m}$.

Calcule o perímetro da base da piscina. Apresente o resultado em metros quadrados arredondados às décimas.

$$V_{\text{Piscina}} = 48 \Leftrightarrow Ab \times h = \underbrace{l^2}_{\substack{\text{Área}\\ \text{Quadrado}}} \times 1{,}6 = 48 \Leftrightarrow l^2 = \frac{48}{1{,}6} \underset{l \geq 0}{\Leftrightarrow} l = \sqrt{30}$$

$$P_{\substack{\text{Base}\\ \text{piscina}}} = 4\sqrt{30} \approx 21{,}9\ \text{m}$$

5.6. Seja f a função representada no gráfico que ao caudal x, faz corresponder o tempo de enchimento, $f(x)$. Escreva uma expressão analítica que possa traduzir essa função.

Como se trata de uma função de proporcionalidade inversa a expressão analítica que traduz a função é $f(x) = \dfrac{48}{x}$

6. Considere o sólido constituído por uma semiesfera assente num cilindro:

- a altura do cilindro é o dobro da medida do raio;
- o raio da base cilindro é igual ao raio da semiesfera;

Seja x a medida do raio da base do cilindro (em cm) e f a função que a x faz corresponder o volume (em cm³) do sólido.

6.1. Mostre que $f(x) = \dfrac{8}{3}\pi x^3$

$$V_{\text{Cilindro}} = Ab \times h = A_{\text{Círculo}} \times h = \pi x^2 \times 2x = 2\pi x^3$$

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{1}{2} V_{\text{Esfera}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{4}{6}\pi x^3 = \frac{2}{3}\pi x^3$$

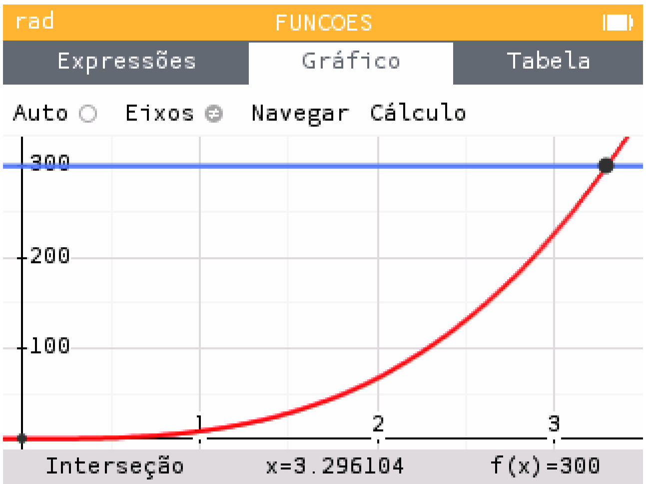
$$V_{\text{Sólido}} = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Semiesfera}} = 2\pi x^3 + \frac{2}{3}\pi x^3 = \frac{8}{3}\pi x^3 \quad \text{c.q.m.}$$

6.2. Calcule o valor exato de $f(3)$

$$f(3)=\frac{8}{3}\pi\times 3^3=72\pi$$

6.3. Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, resolva a equação $f(x)=300$.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

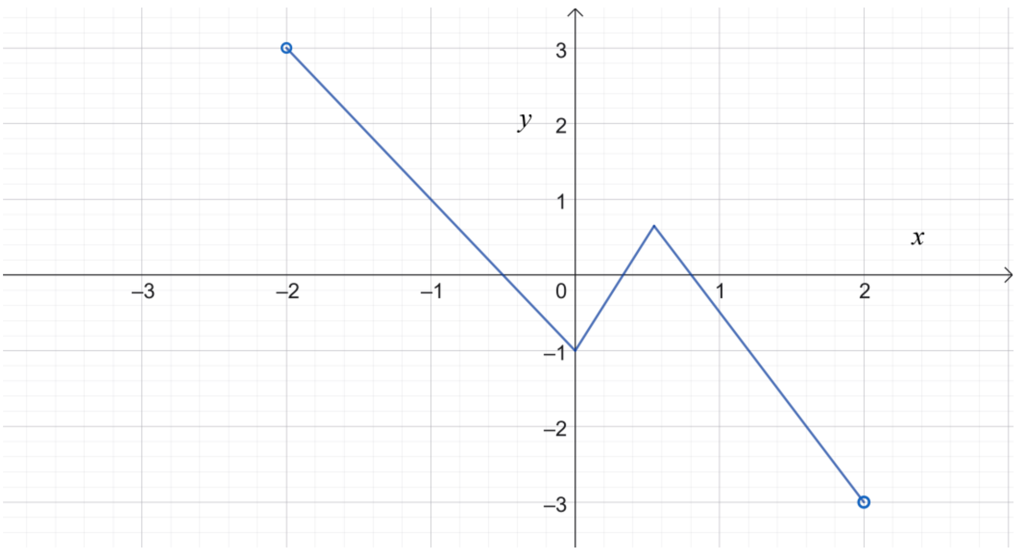


$$f(x)=300 \Leftrightarrow x\approx 3{,}3$$

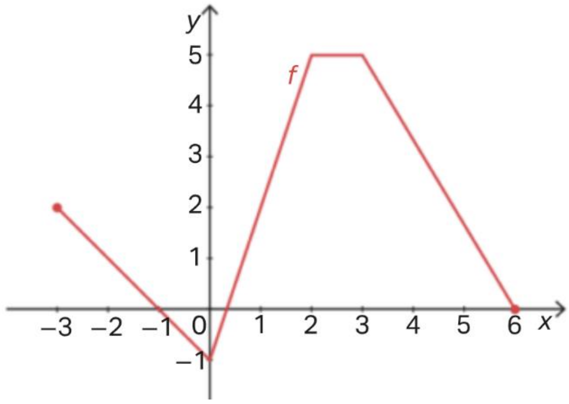
7. Construa o gráfico de uma função *f* que obedeça às seguintes condições:

- $D_f=[-2,2]$;
- tem exatamente três zeros;
- não tem máximos nem mínimos absolutos;
- $f(-1)>f(1)$;
- $f(x)=2$ tem uma solução negativa.

Uma possível solução



8. Na figura está representado num referencial cartesiano, Oxy, o gráfico da função f, de domínio $[-3,6]$.



8.1. Quantos zeros tem f?

Três zeros

8.2. Indique os valores de $f(-3)$ e de $f(2{,}5)$.

$f(-3)=2$ e $f(2{,}5)=5$

8.3. Indique o domínio e contradomínio de f.

$D_f=[-3,6]$ e $D'_f=[-1,5]$

8.4. Determine x de modo que $f(x)=5$.

$f(x)=5 \Leftrightarrow x\in[2,4]$

8.5. Construa uma tabela de variação da função f e estude a monotonia.

x	-3		0		2		3		6
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	5	$\rightarrow$	5	$\searrow$	0

f é decrescente em $[-3,0]$ e em $[3,6]$

f é crescente em $[0,2]$

f é constante em $[2,3]$