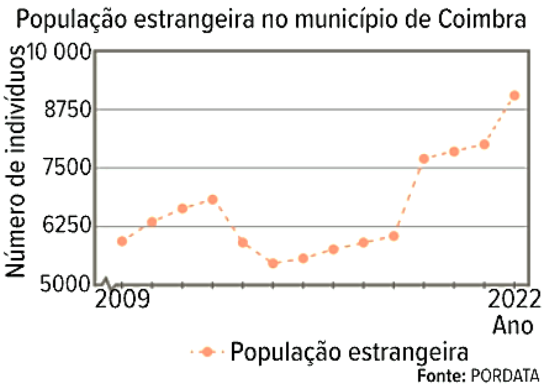
## .F0UNÇÕES – GENERALIDADES 2

1. Na figura está representada graficamente uma função $f$ de domínio $D_f = \{2009, 2010, 2011, \dots, 2022\}$.




1.1. No período de 2009 a 2022, a função é crescente?

Não, porque, por exemplo
$f(2013) < f(2012)$ e $f(2012) > f(2011)$

1.2. Entre 2009 e 2018, em que ano a função atingiu o valor máximo?

Entre 2009 e 2018 a função atingiu o valor máximo em 2012.

1.3. Indique o sinal de $f(2012) - f(2010)$.

$f(2012) - f(2010) > 0$ porque $f(2012) > f(2010)$

1.4. Justifique que $f(2014) - f(x) \leq 0$, para qualquer $x \in D_f$.

$f(2014)$ é mínimo absoluto da função, logo $f(2014) \leq f(x) \Leftrightarrow f(2014) - f(x) \leq 0$ $, \forall x \in D_f$

1.5. Quantas soluções tem a inequação $f(x) < 6250$?

$f(x) < 6250$ tem sete soluções, pois nos anos 2009, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017 e 2018 o número de estrangeiros era inferior a 6250

2. Determine o domínio das funções reais de variável real definidas por:

2.1. $f(x) = -x + 3$

$D_f = IR$

2.2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

$D_g = \{x \in IR : x - 1 \neq 0\} = IR \setminus \{1\}$

CA
$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

2.3. $h(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + 4x + 4}$

$D_h = \{x \in IR : x^2 + 4x + 4 \neq 0\} = IR \setminus \{-2\}$

CA
$x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2} \Leftrightarrow x = -2$

2.4. $i(x)=\sqrt{x+5}$

$D_i=\{x\in IR: x+5\geq 0\}=[-5,+\infty[$

CA
$x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -5$

2.5. $j(x)=\sqrt[3]{x}$

$D_j=IR$

2.6. $k(x)=\sqrt{x^2+16}$

$D_k=\{x\in IR: x^2+16\geq 0\}=IR$

CA
$x^2+16\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq -16$ é uma condição unversal

2.7. $l(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x+3}}$

$D_l=\{x\in IR: x+3\geq 0 \wedge x+3\neq 0\}=$
$\{x\in IR: x+3>0\}=]-3,+\infty[$

CA
$x+3\geq 0 \wedge x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\geq -3 \wedge x\neq -3 \Leftrightarrow x>-3$

2.8. $m(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-6}$

$D_m=\{x\in IR: x\geq 0 \wedge x-6\neq 0\}=IR_0^+\setminus\{6\}$

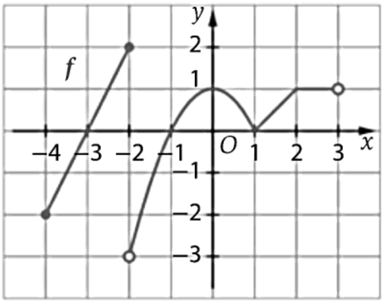
CA
$x\geq 0 \wedge x-6=0 \Leftrightarrow x\geq 0 \wedge x=6$

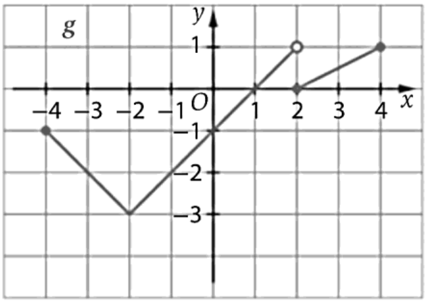
2.9. $n(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{x+1}}$

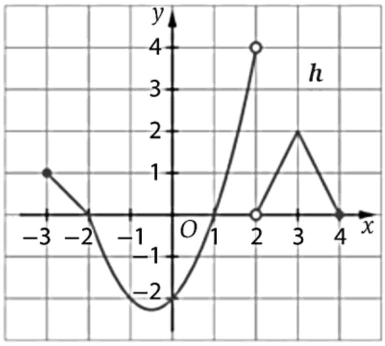
$D_n=\{x\in IR: 4-x\geq 0 \wedge x+1\geq 0 \wedge x+1\neq 0\}=$
$=\{x\in IR: 4-x\geq 0 \wedge x+1>0\}=]4,+\infty[$

CA
$4-x\geq 0 \wedge x+1>0 \Leftrightarrow -x\geq -4 \wedge x>-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x>4 \wedge x>-1$
$\Leftrightarrow x>4$

3. Nas figuras, estão representadas, num referencial o.n. $Oxy$, os gráficos das funções $f$, $g$ e $h$ .








Para cada uma das funções:

3.1. Indique o conjunto dos zeros;

$f(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-3,-1,1\}$ $\quad g(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{1,2\}$ $\quad h(x)=0 \Leftrightarrow x \in \{-2,1,4\}$

3.2. Construa um quadro de sinal.

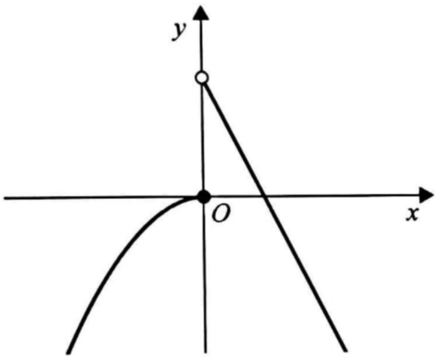
| $x$ | $-4$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $2$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | n.d. |

| $x$ | $-4$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | $1$ |

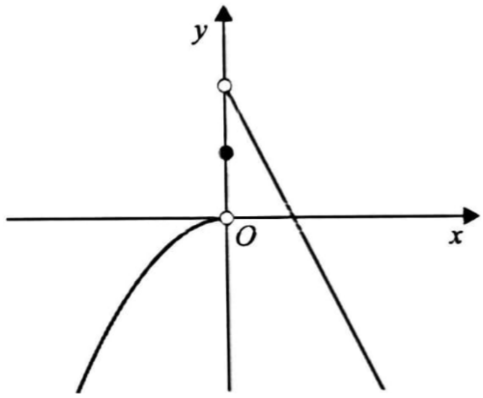
| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | n.d. | $+$ | $0$ |

4. Em qual das figuras seguintes pode estar representada graficamente, num referencial o.n. *Oxy*, uma função que tem um máximo em $x = 0$?

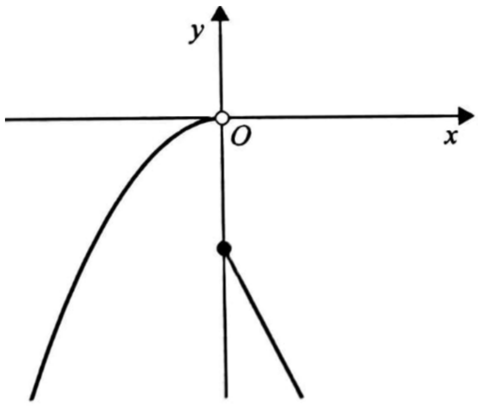
(A)



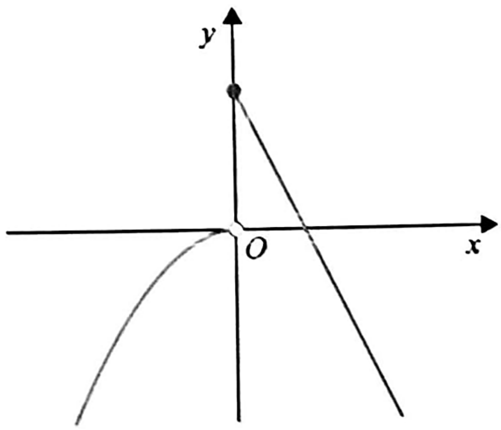

(B)




(C)




(D)




OPÇÃO: D

5. Considere o conjunto *A* definido por $A = \left\{ -4, -\frac{1}{2}, 1, 4 \right\}$.

Seja *f* uma função e domínio $A$.

5.1. Determine o contradomínio de *f* se $f(x) = -x^2$

$f(-4) = -(-4)^2 = -16$ ; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$ ; $f(1) = -1^2 = -1$ ; $f(4) = -4^2 = -16$

Assim $D'_f = \left\{ -16, -1, -\frac{1}{4} \right\}$

5.2. Se $f(x) = 3x - 4$, determine o máximo e o mínimo de *f*.

$f(-4) = 3 \times (-4) - 4 = -16$ ; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 = -\frac{11}{2}$ ; $f(1) = 3 \times 1 - 4 = -1$ ;
$f(4) = 3 \times 4 - 4 = 8$

Máximo: 8
Mínimo: $-16$

5.3. Se a função $f$ é definida pela tabela:

| $x$ | $-4$ | $-\frac{1}{2}$ | $1$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $4$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $4$ |

Qual das seguintes expressões corresponde a $f(x)$?

(A) $-x$ (B) $\frac{1}{x}$ (C) $|x|$ (D) $x$

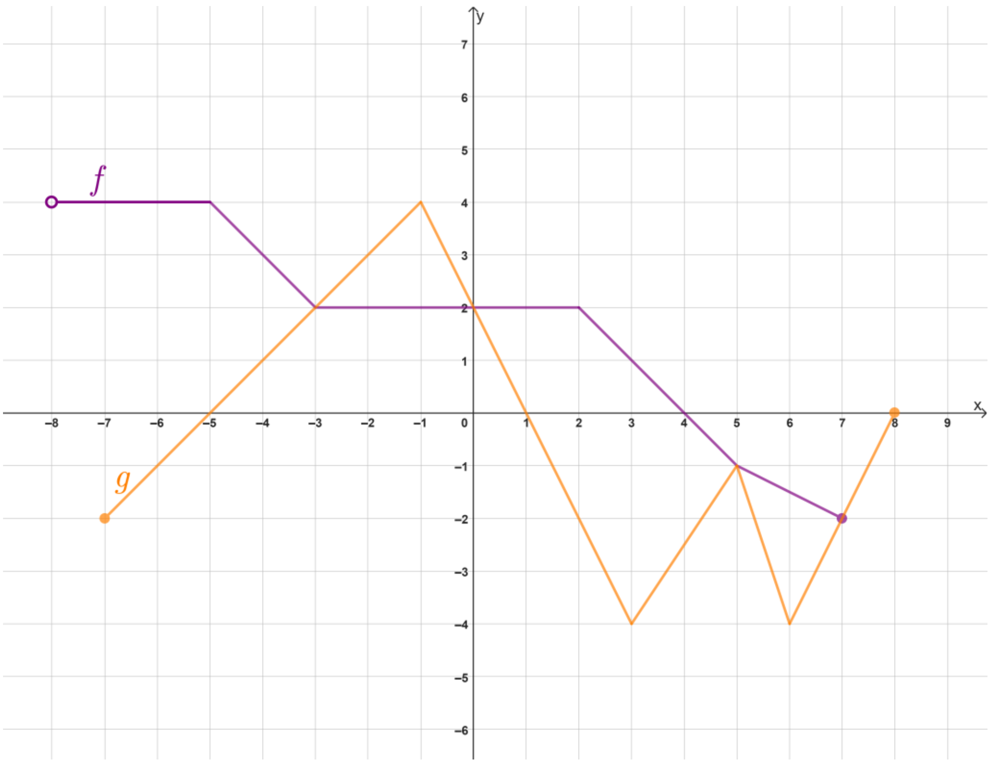
(A) $-(-4)=4$ ; $-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ ; $-1$ ; $-4$

(B) $\frac{1}{-4}=-\frac{1}{4}$

(C) $|-4|=4$ ; $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ; $|1|=1$ ; $|4|=4$

**OPÇÃO: C**

6. Na figura estão representadas, num referencial o.n. $Oxy$, as funções $f$ e $g$




6.1. Indique o domínio e o contradomínio das funções $f$ e $g$

$D_f=]-8,7]$ $D'_f=[-2,4]$

$D_g=[-7,8]$ $D'_g=[-4,4]$

**6.2.** Indique o conjunto solução de cada uma das condições seguintes.

**6.2.1.** $f(x)=0$

$f(x)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=4$

**6.2.2.** $g(x)=0$

$g(x)=0 \Leftrightarrow$
$x \in \{-5,1,8\}$

**6.2.3.** $f(x)=2$

$f(x)=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [-3,2]$

**6.2.4.** $g(x)=-4$

$g(x)=-4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{3,6\}$

**6.2.5.** $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in \{-3,0,5,7\}$

**6.2.6.** $f(x)\geq 2$

$f(x)\geq 2 \Leftrightarrow$
$x \in ]-8,2]$

**6.2.7.** $g(x)<2$

$g(x)<2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in [-7,-3[ \cup ]0,8]$

**6.2.8.** $g(x)\leq f(x)$

$g(x)\leq f(x) \Leftrightarrow x \in [-7,3] \cup [0,7]$

**6.3.** Construa a tabela de variação da função $g$.

| $x$ | $-7$ | | $-1$ | | $3$ | | $5$ | | $6$ | | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-2$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $-1$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $0$ |

**6.4.** Indique os intervalos de monotonia da função *f*.

A função *f* é decrescente em $[-5,3]$ e $[2,7]$

A função *f* é constante em $]-8,-5]$ e $[-3,2]$

**6.5.** Indique os extremos da função *f* e da função *g*.

Função *f*:

- máximos: não existem
- mínimos: 2 em $x=-3$ ; $-2$ (absoluto) em $x=7$

Função *g*:

- máximos: $4$ (absoluto) em $x=-1$ ; $-1$ em $x=5$ ; $0$ em $x=8$
- mínimos: $-2$ em $x=-7$ ; $-4$ (absoluto) em $x=3$ e $x=6$

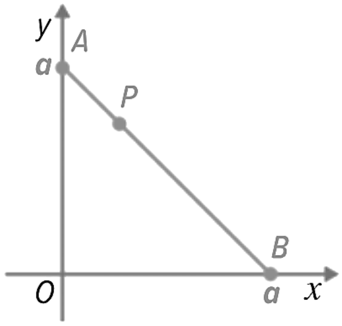
7. Seja $g$ uma função de domínio $\left\{a, -\frac{1}{3}, \sqrt{2}\right\}$ definida por $g(x)=\frac{1-x}{2}$.

Determine o valor de $a$ sabendo que $\frac{1}{3}$ pertence ao contradomínio de $g$.

$g(x)=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1-x}{2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3-3x=2 \Leftrightarrow -3x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

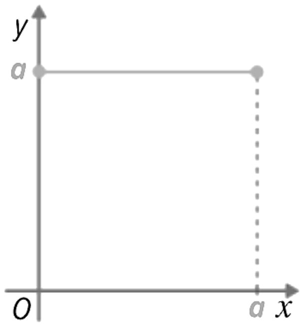
Logo $a=\frac{1}{3}$

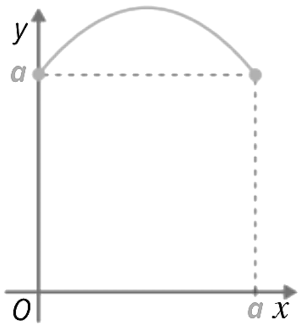
8. Observe a figura e considere o ponto $P$ a deslocar-se de $A$ até $B$ sobre o segmento de reta $[AB]$.

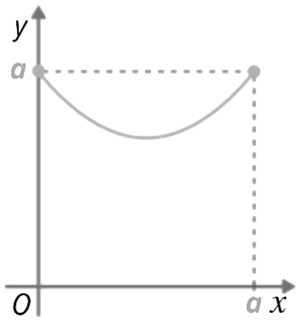


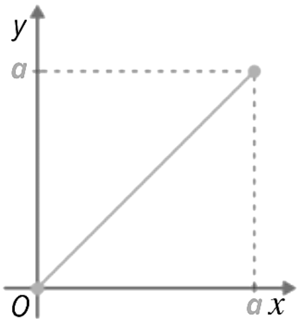

Seja $f$ a função que a $x$, abcissa do ponto $P$, faz corresponder a distância de $P$ ao ponto $O$.

8.1. Qual das representações gráficas pode corresponder à função $f$?

(A)



(B)



(C)



(D)



OPÇÃO: C

8.2. Para cada opção não selecionada, indique uma razão que evidencie que não corresponde à função $f$.

(A) não é porque a distância de $P$ a $O$ não é constante.

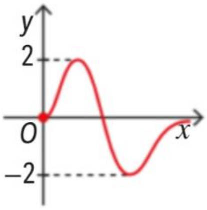
(B) não é porque a distância de $P$ a $O$ nunca é superior a $a$.

(D) não é porque a distância de $P$ a $O$ nunca é zero.

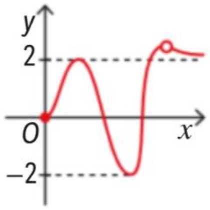
9. De uma função $f$ sabe-se que $D_f = IR_0^+$ e $D'_f = [-2, 2[$

Uma possível representação gráfica de $f$ é:

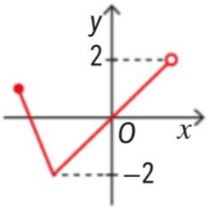
(A)



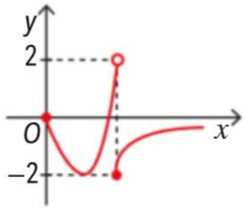

(B)




(C)

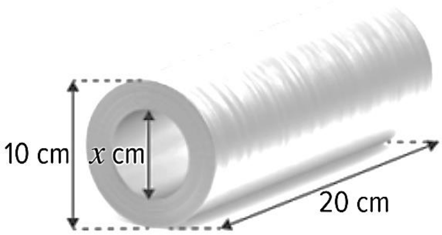



(D)




OPÇÃO: D

10. De um cilindro foi retirado outro cilindro. Resultando na peça apresentada na figura.




Sabe-se que $x \in [2, 6]$

Sejam $f$ e $g$ as funções que a cada $x$ fazem corresponder, respetivamente, a medida da área da base e do volume da peça.

10.1. Seja $f(a)$ o valor máximo da função $f$.

Indique o valor de $a$ e o máximo da função $f$, em cm², arredondado às décimas.

$$A_{base} = 5^2\pi - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \pi = 25\pi - \frac{x^2}{4}\pi = \left(25 - \frac{x^2}{4}\right)\pi = \frac{100 - x^2}{4} \times \pi$$

A área do base é maior quanto menor for o diâmetro do circulo central, como, $a \in [2, 6]$, o diâmetro menor é 2.

Logo, $f(2) = \frac{100 - 2^2}{4}\pi = \frac{100 - 4}{4}\pi \approx 75,4 \text{ cm}^2$

**10.2.** Seja $g(b)$ o valor mínimo da função $g$ .

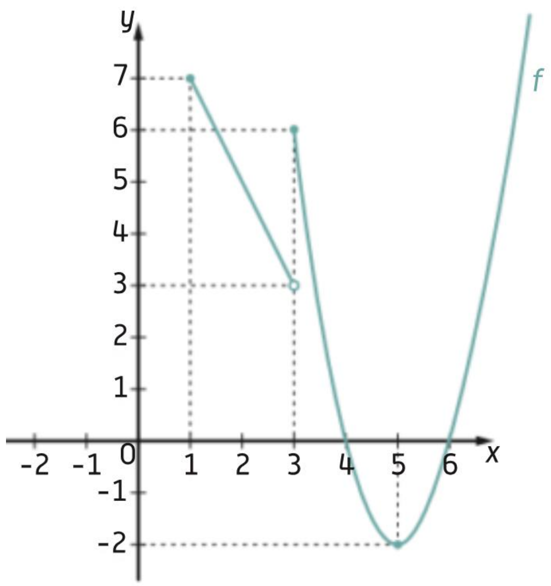
Indique o valor de $b$ e o mínimo de $g$ , em cm³ , arredondado às centésimas.

$$V_{cilindro} = A_{base} \times \text{Altura} = \frac{100-x^2}{4} \times \pi \times 20 = 5\times\left(100-x^2\right)\times\pi = \left(500-5x^2\right)\pi$$

O volume do cilindro é menosr quanto maior for o diâmetro do circulo central, como, $b\in[2,6]$, o diâmetro maior é 6.

Logo, $g(6)=\left(500-5\times6^2\right)\pi\approx1005,31\text{ cm}^3$

**11.** No referencial o.n. *Oxy* está representada graficamente a função *f*.




**11.1.** Indique o domínio e contradomínio da função *f*.

$D_f = [1,+\infty[ \quad ; \quad D'_f = [-2,+\infty[$

**11.2.** Indique, caso existam o conjunto de minorantes e majorantes da função *f*.

Conjunto de minorantes: $]-\infty,-2]$

A função não tem majorantes.

**11.3.** Indique o maior intervalo de números reais onde a função *f* seja:

a) negativa;

$]4,6[$

b) crescente.

$[5,+\infty[$

**11.4.** Comente a afirmação:

"A função *f* é monótona em [1 , 5]."

A afirmação é falsa.

Por exemplo: Por exemplo: $2<3$ e $f(2)<f(3)$ ; $3<5$ e $f(3)>f(5)$

**11.5.** Relativamente à função *f* indique os seus:

a) extremos relativos;

Mínimos relativos: $-2$

Máximos relativos: 6 e 7

b) extremos absolutos;

Mínimo absoluto: $-2$

Máximo absoluto: não existe.

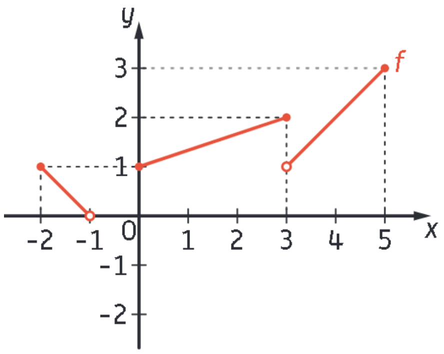
c) minimizantes;

5

d) maximizantes.

1 e 3

12. Considere a função *f* representada graficamente na figura.




12.1. Indique o domínio e o contradomínio da função *f*.

12.2. Das afirmações seguintes, indique a falsa e corrija-a.

(A) *f* não tem zeros;

(B) *f* é crescente em [0 , 5[

(C) *f* é decrescente em ]–2 , –1[;

(D) $D'_f = ]0,3]$

(B) é falsa *f* é crescente em [0 , 3] e em ]3 , 5]

12.3. Indique o conjunto solução de $f(x)=1$

$S=\{-2,0\}$

12.4. Indique os extremos da função *f*.

$\text{Mínimos: } 1 \text{ para } x=0$

$\text{Máximos: } 1 \text{ para } x=-2 \text{ ; } 2 \text{ para } x=3 \text{ ; } 3(\text{absoluto}) \text{ para } x=5$

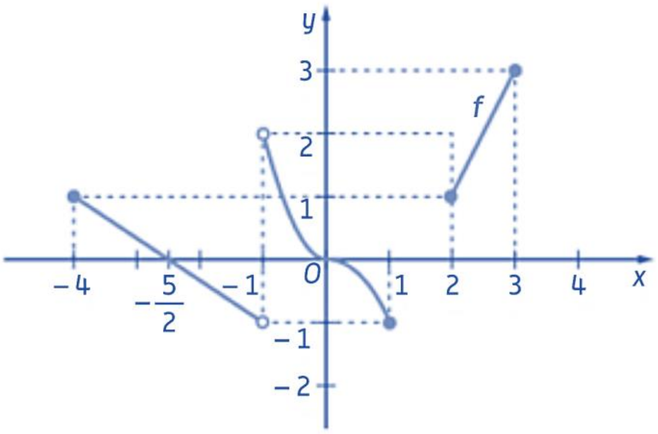
13. Observe os seguintes quadros de variação de sinal e de variação de monotonia da função *f*.

| $x$ | $-4$ | | $-\frac{5}{2}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | + | 0 | – | ND | + | 0 | – | –1 | ND | 1 | + | 3 |

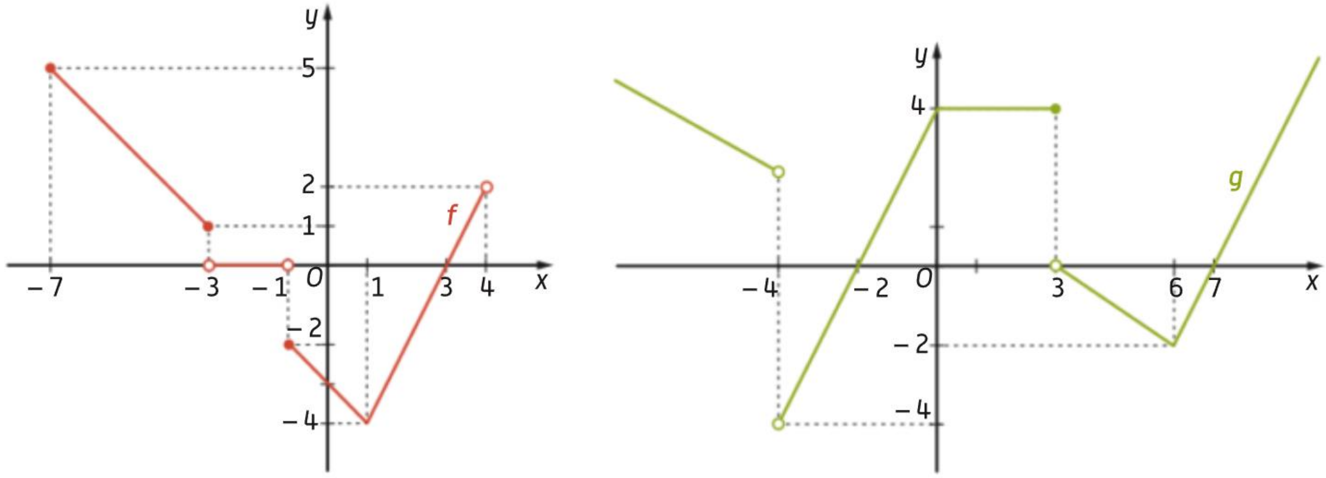
| $x$ | $-4$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | ↘ | ND | ↘ | –1 | ND | 1 | ↗ | 3 |

Represente, num referencial o.n. *Oxy*, um possível gráfico que represente a função *f*.

Por exemplo:



**14.** Considere as funções $f$ e $g$ representadas, num referencial o.n. $Oxy$, da figura.




Para cada uma das funções:

**14.1.** Indique os zeros.

Função $f$: $]-3,-1[\cup\{3\}$

Função $g$: $\{-2\,,7\}$

**14.2.** Estude o sinal.

Função $f$:

- negativa em $[-1\,,3[$
- nula em $]-3,-1[\cup\{3\}$
- positiva em $[-7,-3]\cup]3,4[$

Função $g$:

- negativa em $]-4,-2[\cup]3,7[$
- nula em $\{-2,7\}$
- positiva em $]-\infty,-4[\cup]-2,3]\cup]7,+\infty[$

**14.3.** Indique os extremos absolutos e relativos.

Função $f$:

- Mínimos relativos: $-4$ e $0$
- Mínimo absoluto: $-4$
- Máximos relativos: $0$ e $5$
- Máximo absoluto: $5$

Função $g$:

- Mínimos relativos: $-2$ e $4$
- Mínimo absoluto: não existe
- Máximos relativos: $4$
- Máximo absoluto: não existe

**14.4.** Estude a monotonia.

Função $f$:

- é decrescente em $[-7,3]$ e em $[-1,1]$
- é crescente em $[1,4[$
- é constante em $]-3,-1[$

Função $g$:

- é decrescente em $]-\infty,-4[$ e em $[3,6[$
- é crescente em $]-4,0]$ e em $[6,+\infty[$
- é constante em $[0,3]$